

N° D'ORDRE

1512.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. FASSBINDER,

Professeur au Collège Stanislas.

1<sup>re</sup> THÈSE. — SUR LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES VARIABLES ET LA ROTATION  
DE LA TERRE.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 juin 1913 devant la Commission d'Examen.

MM. P. APPELL, *Président.*  
H. ANDOYER, } *Examineurs.*  
PUISEUX, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913



N° D'ORDRE

1512.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. FASSBINDER,

Professeur au Collège Stanislas.

1<sup>re</sup> THÈSE. — SUR LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES VARIABLES ET LA ROTATION  
DE LA TERRE.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 juin 1913 devant la Commission d'Examen.



MM. P. APPELL, *Président.*  
H. ANDOYER, } *Examineurs.*  
PUISEUX, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

# UNIVERSITÉ DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

|                                   |                               |                                                   |
|-----------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>Doyen</b> .....                | P. APPELL, professeur.        | Mécanique analytique et Mécanique céleste.        |
| <b>Doyen honoraire</b> .....      | G. DARBOUX.....               | Géométrie supérieure.                             |
| <b>Professeurs honoraires</b> ... | { CH. WOLF.<br>RIBAN.         |                                                   |
|                                   | LIPPMANN.....                 | Physique.                                         |
|                                   | BOUTY.....                    | Physique.                                         |
|                                   | BOUSSINESQ.....               | Physique mathématique et Calcul des probabilités. |
|                                   | PICARD.....                   | Analyse supérieure et Algèbre supérieure.         |
|                                   | YVES DELAGE.....              | Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.           |
|                                   | GASTON BONNIER.....           | Botanique.                                        |
|                                   | DASTRE.....                   | Physiologie.                                      |
|                                   | KOENIGS.....                  | Mécanique physique et expérimentale.              |
|                                   | VELAIN.....                   | Géographie physique.                              |
|                                   | GOURSAT.....                  | Calcul différentiel et Calcul intégral.           |
|                                   | HALLER.....                   | Chimie organique.                                 |
|                                   | JOANNIS.....                  | Chimie (Enseignement P. C. N.).                   |
|                                   | P. JANET.....                 | Physique (Enseignement P. C. N.).                 |
|                                   | WALLERANT.....                | Minéralogie.                                      |
|                                   | ANDOYER.....                  | Astronomie.                                       |
| <b>Professeurs</b> .....          | PAINLEVÉ.....                 | Mécanique rationnelle.                            |
|                                   | HAUG.....                     | Géologie.                                         |
|                                   | HOUSSAY.....                  | Zoologie.                                         |
|                                   | H. LE CHATELIER....           | Chimie.                                           |
|                                   | GABRIEL BERTRAND...           | Chimie biologique.                                |
|                                   | M <sup>me</sup> P. CURIE..... | Physique générale.                                |
|                                   | CAULLERY.....                 | Zoologie (Évolution des êtres organisés).         |
|                                   | C. CHABRIÉ.....               | Chimie appliquée.                                 |
|                                   | G. URBAIN.....                | Chimie.                                           |
|                                   | EMILE BOREL.....              | Théorie des fonctions.                            |
|                                   | MARCHIS.....                  | Aviation.                                         |
|                                   | JEAN PERRIN.....              | Chimie physique.                                  |
|                                   | G. PRUVOT.....                | Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.           |
|                                   | MATRUCHOT.....                | Botanique.                                        |
|                                   | ABRAHAM.....                  | Physique.                                         |
|                                   | CARTAN.....                   | Calcul différentiel et Calcul intégral.           |
|                                   | CL. GUICHARD.....             | Mathématiques générales.                          |
|                                   | N.....                        | Application de l'Analyse à la Géométrie.          |
|                                   | N.....                        | Histologie.                                       |
|                                   | PUISEUX.....                  | Mécanique et Astronomie.                          |
|                                   | LEDUC.....                    | Physique.                                         |
|                                   | MICHEL.....                   | Minéralogie.                                      |
|                                   | HÉROUARD.....                 | Zoologie.                                         |
|                                   | LÉON BERTRAND.....            | Géologie.                                         |
| <b>Professeurs adjoints</b> ..... | RÉMY PERRIER.....             | Zoologie (Enseignement P. C. N.).                 |
|                                   | MOLLIARD.....                 | Physiologie végétale.                             |
|                                   | COTTON.....                   | Physique.                                         |
|                                   | LESPIEAU.....                 | Chimie.                                           |
|                                   | GENTIL.....                   | Pétrographie.                                     |
|                                   | SAGNAC.....                   | Physique (Enseignement P. C. N.).                 |
|                                   | PEREZ.....                    | Zoologie (Évolution des êtres organisés).         |
| <b>Secrétaire</b> .....           | D. TOMBECK.                   |                                                   |

A

MONSIEUR P. APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,  
DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

Hommage d'inaltérable reconnaissance.



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41550421\\_0015](https://archive.org/details/IA41550421_0015)

---

# PREMIÈRE THÈSE.

---

SUR LA

## DYNAMIQUE DES SYSTÈMES VARIABLES

ET LA

## ROTATION DE LA TERRE.

---

### Introduction.

Les équations de la dynamique des systèmes, établies en supposant qu'on est en présence de corps rigoureusement solides, ne répondent pas à tous les besoins.

Déjà Lagrange, dans le second Volume de la *Mécanique analytique* (1815), s'était occupé du mouvement de rotation d'un système variable, et les équations différentielles auxquelles il est arrivé ont été établies par Liouville avec d'autres notations (*Additions à la Connaissance des Temps pour 1859*). On a songé au siècle dernier à appliquer ces équations au mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, en la considérant comme un système déformable soumis à l'attraction du Soleil et de la Lune. Il restait à faire des hypothèses sur sa déformation, et c'est ce qu'ont essayé de nombreux géomètres ou physiciens.

Dès 1863, Sir W. Thomson l'assimile à un corps élastique dont la rigidité est voisine de celle de l'acier. En 1871, M. Gylden publie ses

*Recherches sur la rotation de la Terre* et introduit la considération des axes moyens. Parmi les auteurs qui depuis s'occupèrent de la rotation de la Terre, nous pouvons citer Lord Kelvin, MM. Schiaparelli, Newcomb, Darwin, Chandler [qui découvrit en 1892 <sup>(1)</sup> le cycle qui porte son nom], et MM. Hills et Larmor qui cherchèrent <sup>(2)</sup> à expliquer les irrégularités du mouvement de l'axe de rotation de la Terre après défalcation du mouvement chandlérien, et étudièrent les relations de la nutation précessionnelle de la Terre avec sa résistance aux déformations périodiques.

Dans les pages qui suivent, je suppose qu'à l'intérieur du système il existe trois axes tels que

$$x_1 = h x_0, \quad y_1 = k y_0, \quad z_1 = l z_0,$$

$h, k, l$  étant des fonctions du temps égales à 1 pour  $t = 0$  et  $x_0, y_0, z_0$  trois constantes, désignent les coordonnées d'un quelconque de ses points, de sorte que si  $h = k = l$  le corps se déforme en restant semblable à lui-même. J'étudie le mouvement de rotation d'un tel système autour d'un des axes considérés ou d'un point, et j'étends au cas actuel les notions d'axes permanent ou spontané de rotation, ainsi que la théorie de l'ellipsoïde de Poinso.

Pour appliquer les hypothèses précédentes au mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité, il suffit de reprendre la théorie de ce mouvement, devenue classique depuis la publication du *Traité de Mécanique céleste* par M. Tisserand. Mais cette fois la Terre n'est plus un solide absolument rigide, je suppose qu'elle se refroidit graduellement en restant semblable à elle-même, de sorte que ses moments d'inertie principaux sont variables et aussi la fonction des forces qui le sollicitent. En particulier, j'étudie dans ces conditions la question de la fixité des pôles à la surface de la Terre, celles de la variation de la vitesse de rotation et du jour sidéral, et je cherche ce que deviennent les formules de la précession et de la nutation.

A la fin de la seconde Partie se trouvent résumés les principaux résultats obtenus.

---

<sup>(1)</sup> *Monthly Notices*, mars 1892.

<sup>(2)</sup> *Monthly Notices*, 1906-1908, p. 22 ; 1909-1910, p. 480.

### Équations générales.

Les équations différentielles du mouvement de rotation d'un corps ou d'un système de corps variables ont été données pour la première fois par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*. Ce sont les équations des moments des quantités de mouvement par rapport à des axes mobiles.

L'origine O des coordonnées fixes  $x, y, z$  est un point fixe du système. Les axes mobiles  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  sont liés au système en mouvement. On suppose que les liaisons existant entre les différents points du système n'empêchent pas une rotation d'ensemble autour d'un axe quelconque. Les formules permettant de passer des coordonnées fixes aux autres sont

$$(\alpha) \quad \begin{cases} x = ax_1 + by_1 + cz_1, \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1. \end{cases}$$

Les mêmes relations existent entre les composantes des forces, les vitesses, les accélérations, etc. Ainsi, en désignant par  $u, v, w, u_1, v_1, w_1; U, V, W, U_1, V_1, W_1$  les projections d'une vitesse et d'une accélération dans les deux systèmes de coordonnées, on a

$$\begin{aligned} (\beta) \quad & \begin{cases} u = au_1 + bv_1 + cw_1, \\ v = a'u_1 + b'v_1 + c'w_1, \\ w = a''u_1 + b''v_1 + c''w_1. \end{cases} \\ (\gamma) \quad & \begin{cases} U = aU_1 + bV_1 + cW_1, \\ V = a'U_1 + b'V_1 + c'W_1, \\ W = a''U_1 + b''V_1 + c''W_1. \end{cases} \end{aligned}$$

En désignant par  $L_1, M_1, N_1$  les moments des forces extérieures par rapport aux axes mobiles, Lagrange obtient les équations

$$(I) \quad \begin{cases} \Sigma m(y_1 W_1 - z_1 V_1) = \Sigma(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = L_1, \\ \Sigma m(z_1 U_1 - x_1 W_1) = \Sigma(z_1 X_1 - x_1 Z_1) = M_1, \\ \Sigma m(x_1 V_1 - y_1 U_1) = \Sigma(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = N_1. \end{cases}$$

Les projections de la rotation instantanée sur les axes mobiles étant

désignées par  $p, q, r$  et définies par les relations

$$\begin{aligned} p \, dt &= c \, db + c' \, db' + c'' \, db'', \\ q \, dt &= a \, dc + a' \, dc' + a'' \, dc'', \\ r \, dt &= b \, da + b' \, da' + b'' \, da'', \end{aligned}$$

on a, en différentiant les formules de transformation supposées résolues par rapport à  $x_1, y_1, z_1$ ,

$$(\partial) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{dx_1}{dt} + qz_1 - ry_1, \\ v_1 = \frac{dy_1}{dt} + rx_1 - pz_1, \\ w_1 = \frac{dz_1}{dt} + py_1 - qx_1. \end{cases}$$

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} U_1 = \frac{du_1}{dt} + qw_1 - rv_1, \\ V_1 = \frac{dv_1}{dt} + ru_1 - pw_1, \\ W_1 = \frac{dw_1}{dt} + pv_1 - qu_1. \end{cases}$$

En substituant dans les équations (I) et posant

$$f_1 = \Sigma m (y_1 w_1 - z_1 v_1), \quad g_1 = \Sigma m (z_1 u_1 - x_1 w_1), \quad h_1 = \Sigma m (x_1 v_1 - y_1 u_1),$$

Lagrange obtient une seconde forme des équations (I)

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{df_1}{dt} + qh_1 - rg_1 = L_1, \\ \frac{dg_1}{dt} + rf_1 - ph_1 = M_1, \\ \frac{dh_1}{dt} + pg_1 - qf_1 = N_1. \end{cases}$$

Si l'on introduit la force vive

$$2T = \Sigma m (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2),$$

on obtient enfin la troisième forme des équations du mouvement

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial q} = L_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{\partial T}{\partial p} - p \frac{\partial T}{\partial r} = M_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} + p \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial p} = N_1. \end{cases}$$

Je me propose d'appliquer ces formules à l'étude du mouvement d'un corps dans lequel les différents points  $x_1, y_1, z_1$  ont leurs coordonnées fonctions du temps

### Hypothèses fondamentales.

Nous supposons qu'il existe à l'intérieur du corps trois droites  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  telles que tout point M du corps ait pour coordonnées à un instant quelconque  $t$

$$(1) \quad x_1 = h x_0, \quad y_1 = k y_0, \quad z_1 = l z_0,$$

$x_0, y_0, z_0$  étant les valeurs de ces coordonnées à l'instant  $t = 0$ , et les coefficients  $h, k, l$  étant trois fonctions du temps toujours finies et égales à 1 pour  $t = 0$ . Si elles sont égales entre elles, le corps se déforme en restant constamment semblable à lui-même, suivant la loi

$$(2) \quad x_1 = k x_0, \quad y_1 = k y_0, \quad z_1 = k z_0.$$

Ces droites constituent une sorte de charpente rigide du corps : il est clair en effet, d'après les formules (1), que tout point qui est sur l'une d'elles, y reste constamment.

Dans cette hypothèse, nous aurons

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} u_1 = x_0 \frac{dh}{dt} + q l z_0 - r k y_0, \\ v_1 = y_0 \frac{dk}{dt} + r h x_0 - p l z_0, \\ w_1 = z_0 \frac{dl}{dt} + p k y_0 - q h x_0. \end{cases}$$

Il s'introduira dans les calculs les moments d'inertie du système par rapport aux axes mobiles

$$\begin{aligned} A &= \Sigma m (y_1^2 + z_1^2) = \Sigma m (k^2 y_0^2 + l^2 z_0^2), \\ B &= \Sigma m (z_1^2 + x_1^2) = \Sigma m (l^2 z_0^2 + h^2 x_0^2), \\ C &= \Sigma m (x_1^2 + y_1^2) = \Sigma m (h^2 x_0^2 + k^2 y_0^2), \end{aligned}$$

et aussi, toutes les fois que  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$  ne seront pas les axes de l'ellipsoïde instantané d'inertie relatif au point O, les produits d'inertie

$$\begin{aligned} D &= \Sigma m y_1 z_1 = kl \Sigma m y_0 z_0, \\ E &= \Sigma m z_1 x_1 = lh \Sigma m z_0 x_0, \\ F &= \Sigma m x_1 y_1 = kh \Sigma m x_0 y_0. \end{aligned}$$

S'il y a intérêt à introduire les moments d'inertie par rapport aux plans de coordonnées, ou les valeurs initiales des produits d'inertie, nous poserons

$$\begin{aligned} \Sigma m x_0^2 &= a_0, & \Sigma m y_0^2 &= b_0, & \Sigma m z_0^2 &= c_0, \\ \Sigma m y_0 z_0 &= D_0, & \Sigma m z_0 x_0 &= E_0, & \Sigma m x_0 y_0 &= F_0, \end{aligned}$$

de sorte que nous aurons

$$\begin{aligned} A &= k^2 b_0 + l^2 c_0, & B &= l^2 c_0 + h^2 a_0, & C &= h^2 a_0 + k^2 b_0, \\ D &= kl D_0, & E &= lh E_0, & F &= hk F_0. \end{aligned}$$

**Mouvement de rotation autour de l'un des axes  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$ .**

Supposons que l'axe  $Oz_1$  soit fixe dans l'espace, et prenons cet axe pour axe des  $z$  (*fig. 1*). Les projections de la rotation instantanée sur les axes mobiles sont alors

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega.$$

Les formules (*1 bis*) donnent alors

$$u_1 = x_0 \frac{dh}{dt} - \omega k y_0, \quad v_1 = y_0 \frac{dk}{dt} + \omega h x_0, \quad w_1 = z_0 \frac{dl}{dt}.$$

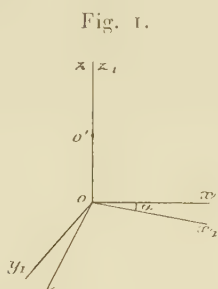
Il en résulte

$$2T = C\omega^2 + a_0 \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + b_0 \left( \frac{dk}{dt} \right)^2 + c_0 \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 + 2F_0 \omega \left( h \frac{dk}{dt} - k \frac{dh}{dt} \right).$$

On a donc

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{dT}{d\omega} = C\omega + F_0 \left( h \frac{dk}{dt} - k \frac{dh}{dt} \right).$$

Les forces extérieures sont les forces données et les réactions qui



s'exercent aux différents points de l'axe. Les moments de ces réactions par rapport à l'axe  $Oz_1$  étant nuls, la troisième des équations (III) donne

$$\frac{d}{dt} \left[ C\omega + F_0 \left( h \frac{dk}{dt} - k \frac{dh}{dt} \right) \right] = N_1,$$

$N_1$  désignant la somme des moments des forces données par rapport à l'axe  $Oz_1$ . Cette équation donne la rotation  $\omega$  à chaque instant.

S'il arrive qu'il n'y a pas de forces données, ou tout au moins que la somme de leurs moments par rapport à l'axe de rotation soit nulle, on a l'intégrale

$$C\omega + F_0 \left( h \frac{dk}{dt} - k \frac{dh}{dt} \right) = \text{const.}$$

Ce fait se produira par exemple dans le cas d'un corps pesant autour de l'axe  $Oz_1$ , supposé vertical.

Si en même temps  $F_0$  est nul, ou bien si les coefficients  $h$  et  $k$  sont dans un rapport constant <sup>(1)</sup>,  $C\omega$  reste constant. On voit alors que la vitesse de rotation est à chaque instant inversement proportionnelle au moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

*Réactions de l'axe.* — Pour pouvoir calculer ces réactions, nous nous inspirerons des hypothèses que l'on fait dans le cas d'un corps

---

<sup>(1)</sup> Dans le cas où les coefficients  $h$  et  $k$  sont égaux, le corps se déforme de façon que tous les plans passant par  $OZ_1$  restent fixes dans le corps.

solide. Nous supposons que l'immobilité de l'axe  $Oz$ , ait été obtenue en fixant le point  $O$  et en assujettissant un autre point  $O'$  de  $Oz$ , à décrire l'axe des  $z$ . Désignons par  $X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''$  les projections sur les axes fixes de l'une quelconque des forces données, de la réaction en  $O$  et de la réaction en  $O'$ , et par les mêmes lettres affectées d'indices leurs projections sur les axes mobiles. Le théorème du mouvement du centre de gravité donne

$$(3) \quad \begin{cases} \Sigma m U = X' + X'' + \Sigma X, \\ \Sigma m V = Y' + Y'' + \Sigma Y, \\ \Sigma m W = Z' + Z'' + \Sigma Z. \end{cases}$$

Écrivons maintenant les équations (I). Nous avons ici

$$U_1 = \frac{du_1}{dt} - \omega v_1, \quad V_1 = \frac{dv_1}{dt} + \omega u_1, \quad W_1 = \frac{dw_1}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U_1 &= x_0 \frac{d^2 h}{dt^2} - \frac{d\omega}{dt} k y_0 - 2\omega \frac{dk}{dt} y_0 - \omega^2 h x_0, \\ V_1 &= y_0 \frac{d^2 k}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} h x_0 + 2\omega \frac{dh}{dt} x_0 - \omega^2 k y_0, \\ W_1 &= z_0 \frac{d^2 l}{dt^2}. \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans les équations indiquées, nous avons, en appelant  $\mu$  la cote du point  $O'$  à un instant quelconque, et  $L_1, M_1, N_1$  les moments des forces données au même instant,

$$(4) \quad \begin{cases} \left( k \frac{d^2 l}{dt^2} - l \frac{d^2 k}{dt^2} + \omega^2 k l \right) D_0 - l \left( h \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{dh}{dt} \right) E_0 = L_1 - \mu Y_1'', \\ \left( l \frac{d^2 h}{dt^2} - h \frac{d^2 l}{dt^2} - \omega^2 h l \right) E_0 - l \left( k \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{dk}{dt} \right) D_0 = M_1 + \mu X_1'', \\ \frac{d}{dt} \left[ C\omega + F_0 \left( h \frac{dk}{dt} - k \frac{dh}{dt} \right) \right] = N_1. \end{cases}$$

La dernière équation ayant été utilisée pour faire connaître  $\omega$ , nous n'avons, comme dans le cas du corps solide, que cinq équations pour déterminer les réactions. Nous y joindrons les équations

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} X'' = a X_1'' + b Y_1'', & Y'' = a' X_1'' + b' Y_1'', & Z'' = Z_1'', \\ & = X_1'' \cos \alpha - Y_1'' \sin \alpha, & = X_1'' \sin \alpha + Y_1'' \cos \alpha, \end{cases}$$

Quand on saura intégrer la dernière équation qui donne  $\omega$ , d'où l'angle  $\alpha$ , les deux premières équations (4) donneront  $X'_1$  et  $Y'_1$ ; les équations (4 bis) feront connaître  $X''$  et  $Y''$ ; les deux premières équations (3) détermineront ensuite  $X'$  et  $Y'$ , et la dernière la somme  $Z' + Z''$ .

### Notion mécanique des axes principaux d'inertie.

Supposons que les forces données se réduisent à un couple dont le plan soit perpendiculaire à l'axe de rotation, et cherchons s'il est possible de conserver le mouvement sans que le point  $O'$  agisse. On a alors

$$L_1 = M_1 = 0.$$

Si nous voulons avoir  $X''_1 = Y''_1 = 0$ , les équations (4) donnent

$$D_0 = 0, \quad E_0 = 0.$$

Il faudra donc que l'axe  $Oz_1$  soit un axe principal d'inertie pour le point  $O$ .

Réciproquement, si  $D_0 = E_0 = 0$ , et si  $L_1 = M_1 = 0$ , on aura  $X''_1 = Y''_1 = 0$ . D'où le théorème suivant :

*Soit un corps ayant un point fixe  $O$  et à l'intérieur duquel existent trois droites  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  rectangulaires deux à deux, et telles que chaque point  $M$  du corps ait pour coordonnées à un instant quelconque  $t$ , par rapport à ces droites,*

$$x_1 = hx_0, \quad y_1 = ky_0, \quad z_1 = lz_0,$$

*$x_0, y_0, z_0$  étant des constantes et  $h, k, l$ , trois fonctions finies du temps égales à 1 pour  $t = 0$ . Pour que ce corps, supposé sollicité uniquement par un couple dont l'axe est parallèle à l'une des droites  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$ , tourne constamment autour de cette droite, comme si elle était fixe, il faut et il suffit qu'elle soit un axe principal d'inertie pour le point fixe  $O$ .*

Ainsi se trouve étendue la notion d'axe permanent de rotation.

On peut demander aussi que le point  $O$  n'agisse pas non plus.

On devra alors avoir, en plus de  $X'' = Y'' = Z'' = 0$ , les relations  $X' = Y' = Z' = 0$ . Les équations (3) nous donnent dans ce cas

$$\Sigma m U = 0, \quad \Sigma m V = 0, \quad \Sigma m W = 0.$$

Mais d'après ( $\gamma$ ) cela entraîne

$$\Sigma m U_1 = 0, \quad \Sigma m V_1 = 0, \quad \Sigma m W_1 = 0,$$

ou, eu égard aux expressions actuelles de  $U_1, V_1, W_1$ ,

$$\Sigma m x_0 = 0, \quad \Sigma m y_0 = 0, \quad \Sigma m z_0 \frac{d^2 l}{dt^2} = 0.$$

La dernière condition se décompose en deux :

$$\Sigma m z_0 = 0, \quad \frac{d^2 l}{dt^2} = 0.$$

On a donc le théorème suivant, qui conduit à la généralisation des *axes spontanés de rotation* :

*Pour que le corps précédent, toujours sollicité uniquement par un couple d'axe parallèle à  $Oz_1$ , et qui a commencé à tourner autour de  $Oz_1$ , continue à tourner autour de cette droite entièrement libre, comme si elle était fixe, il faut et il suffit : 1° qu'elle soit un des axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie ; 2° que l'une des deux conditions suivantes soit remplie : ou bien que le point O soit le centre de gravité du corps, ou bien que le coefficient  $l$  soit une fonction linéaire du temps.*

#### Mouvement de rotation autour du point O.

Nous supposerons que le point O est fixe dans l'espace, et que  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  sont les axes principaux d'inertie relativement au point O.

Les relations (1 bis) donnent pour l'expression de la force vive

$$\begin{aligned} 2T &= (k^2 b_0 + l^2 c_0) p^2 + (l^2 c_0 + h^2 a_0) q^2 + (h^2 a_0 + k^2 b_0) r^2 \\ &\quad + a_0 \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + b_0 \left( \frac{dk}{dt} \right)^2 + c_0 \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 \\ &= A p^2 + B q^2 + C r^2 + \Sigma a_0 \left( \frac{dh}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{\partial T}{\partial p} = A p, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = B q, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = C r.$$

Les équations générales (III) deviennent

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d(A p)}{dt} + (C - B) q r = L_1, \\ \frac{d(B q)}{dt} + (A - C) r p = M_1, \\ \frac{d(C r)}{dt} + (B - A) p q = N_1. \end{cases}$$

On voit que ces équations ont la même forme que dans le cas du corps solide; la seule différence est que A, B, C ne sont plus des constantes.

Comme dans le cas du corps solide, les projections sur  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$ , de l'axe du couple résultant OG à l'époque  $t$  des quantités de mouvement des divers points du corps ont pour expressions  $Ap$ ,  $Bq$ ,  $Cr$ , et l'on a

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2, \\ \cos(G, x_1) = \frac{Ap}{G}, \quad \cos(G, y_1) = \frac{Bq}{G}, \quad \cos(G, z_1) = \frac{Cr}{G}.$$

Il reste à joindre aux équations (5) les équations connues

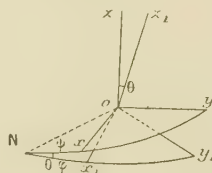
$$(5 \text{ bis}) \quad \begin{cases} p = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi - \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi, \\ q = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi + \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi, \\ r = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \cos \theta, \end{cases}$$

dans lesquelles  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  sont les angles d'Euler. Le point N est le *nœud descendant* du grand cercle  $x_1 y_1$  par rapport à  $xy$ ; l'angle  $\widehat{xON} = \psi$ , d'origine  $x$ , se compte en sens inverse de  $xy$  de 0 à  $2\pi$ ; l'angle  $\widehat{xNx_1} = \theta$  est compris entre 0 et  $\pi$ ; l'angle  $\widehat{NOx_1} = \varphi$ , d'origine N, se compte dans le sens  $x_1 y_1$  de 0 à  $2\pi$  (*fig. 2*).

On pourrait, comme dans le cas du corps solide, remplacer  $p$ ,  $q$ ,  $r$

par leurs valeurs (5 bis) dans les équations (5) : on aurait trois équations simultanées du second ordre par rapport à  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . En général, il vaut mieux garder les six équations (5) et (5 bis).

Fig. 2.



Nous ferons toutefois ce calcul dans le cas particulier où  $A_0 = B_0$  avec  $h = k$ . Dans ce cas on a constamment  $A = B$ . En effet

$$A = \Sigma m (y_1^2 + z_1^2) = \Sigma m (k^2 y_0^2 + l^2 z_0^2) = k^2 b_0 + l^2 c_0,$$

$$B = \Sigma m (z_1^2 + x_1^2) = \Sigma m (l^2 z_0^2 + h^2 x_0^2) = l^2 c_0 + h^2 a_0.$$

Or, l'hypothèse donne

$$\Sigma m (y_0^2 + z_0^2) = \Sigma m (z_0^2 + x_0^2)$$

ou

$$\Sigma m y_0^2 = \Sigma m x_0^2,$$

c'est-à-dire

$$b_0 = a_0,$$

ce qui démontre la proposition. Les équations (5) deviennent alors

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d(Ap)}{dt} + (C - A) qr = L_1, \\ \frac{d(Aq)}{dt} - (C - A) rp = M_1, \\ \frac{d(Cr)}{dt} = N_1. \end{cases}$$

Multipliant les deux premières respectivement par  $\cos \varphi$  et  $-\sin \varphi$ , et ajoutant, nous avons, en appelant  $P_1$  le second membre,

$$\frac{d}{dt} \left[ A (p \cos \varphi - q \sin \varphi) \right] + (C - A) r (p \sin \varphi + q \cos \varphi) = P_1.$$

Faisant la même combinaison avec les multiplicateurs  $\sin \varphi$  et  $\cos \varphi$ ,

nous avons, en désignant par  $Q_1$  le nouveau second membre,

$$\frac{d}{dt}[\Lambda(p \sin \varphi + q \cos \varphi)] - (C - \Lambda)r(p \cos \varphi - q \sin \varphi) = Q_1$$

Or les relations (5 bis) donnent

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = q \sin \varphi - p \cos \varphi, \\ \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = p \sin \varphi + q \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} - \cos \theta \frac{d\psi}{dt} = r. \end{array} \right.$$

En portant ces valeurs dans les équations (6), on a

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left[ -\Lambda \frac{d\theta}{dt} \right] + (C - \Lambda) \sin \theta \frac{d\psi}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} - \cos \theta \frac{d\psi}{dt} \right) = P_1, \\ \frac{d}{dt} \left[ \Lambda \sin \theta \frac{d\psi}{dt} \right] + (C - \Lambda) \frac{d\theta}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} - \cos \theta \frac{d\psi}{dt} \right) = Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left[ C \left( \frac{d\varphi}{dt} - \cos \theta \frac{d\psi}{dt} \right) \right] = N_1. \end{array} \right.$$

Telles sont les équations différentielles qui déterminent dans ce cas  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

*Réaction du point fixe.* — Si  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  sont les projections sur les axes fixes de la réaction en O, et  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , celles de l'une quelconque des forces données, le théorème du mouvement du centre de gravité donne

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m W = Z' + \Sigma Z, \\ \Sigma m U = X' + \Sigma X, \\ \Sigma m V = Y' + \Sigma Y, \end{array} \right.$$

Ceci posé, connaissant  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  à chaque instant  $t$ , on commencera par calculer  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  au moyen des relations (1 bis), d'où  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_1$ , par ( $\varepsilon$ ). D'autre part, en appliquant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique aux neuf triangles

$$x N x_1, \quad y N x_1, \quad z N x_1, \quad x N y_1, \quad \dots, \quad z N z_1,$$

on a

$$(10) \quad \begin{cases} a = \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ a' = -\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ a'' = -\sin \varphi \sin \theta, \\ b = -\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ b' = \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ b'' = -\cos \varphi \sin \theta, \\ c = \sin \psi \sin \theta, \\ c' = \cos \psi \sin \theta, \\ c'' = \cos \theta. \end{cases}$$

Portant les valeurs des neuf cosinus et de  $U, V, W$ , dans les relations  $(\gamma)$ , on connaîtra  $U, V, W$ . Les relations  $(9)$  donneront alors  $X', Y', Z'$ . Dans le cas particulier où le point fixe est le centre de gravité du système, les premiers membres sont nuls, et la réaction a pour projections à chaque instant  $-\Sigma X, -\Sigma Y, -\Sigma Z$ .

**Cas où les forces extérieures se réduisent à une force unique passant par O. Représentation géométrique du mouvement.**

Dans ce cas, les équations  $(5)$  deviennent

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d(Ap)}{dt} + (C - B) qr = 0, \\ \frac{d(Bq)}{dt} + (A - C) rp = 0, \\ \frac{d(Cr)}{dt} + (B - A) pq = 0. \end{cases}$$

On peut former une combinaison intégrable en multipliant ces équations par  $Ap, Bq, Cr$ , et ajoutant :

$$Ap \frac{d(Ap)}{dt} + Bq \frac{d(Bq)}{dt} + Cr \frac{d(Cr)}{dt} = 0,$$

d'où

$$(12) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2,$$

$G^2$  étant ici une constante. Comme dans le cas du corps solide, il est facile d'interpréter géométriquement cette équation. Le couple

résultant des quantités de mouvement  $a$  en général pour projections sur les axes mobiles  $Ap$ ,  $Bq$ ,  $Cr$ ; son extrémité est fixe puisqu'il n'y a pas de forces extérieures ou du moins que celles-ci se réduisent à une force unique passant par le point  $O$ , et la relation (12) exprime simplement que la grandeur de ce couple résultant est constante et égale à  $G$ .

Il n'y a pas actuellement d'autre combinaison intégrable; mais on peut démontrer sur l'expression  $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ , à laquelle se réduit la force vive dans le cas d'un corps solide, que lorsque les forces extérieures se réduisent à une résultante unique passant par  $O$ , la dérivée par rapport au temps de l'expression  $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$  est égale à  $-\Sigma p^2 \frac{dA}{dt}$ .

En effet, des équations (11) nous déduisons :

$$A \frac{dp}{dt} = -p \frac{dA}{dt} + (B - C) qr,$$

$$B \frac{dq}{dt} = -q \frac{dB}{dt} + (C - A) rp,$$

$$C \frac{dr}{dt} = -r \frac{dC}{dt} + (A - B) pq.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) &= 2 \Sigma A p \frac{dp}{dt} + \Sigma p^2 \frac{dA}{dt} \\ &= 2 \Sigma p \left[ -p \frac{dA}{dt} + (B - C) qr \right] + \Sigma p^2 \frac{dA}{dt} = -\Sigma p^2 \frac{dA}{dt}. \end{aligned}$$

Il en résulte, si l'on veut, que l'expression

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \Sigma \int p^2 dA$$

est constante. Dans le cas du corps solide, les différentielles  $dA$ ,  $dB$  et  $dC$  sont nulles, et l'on retrouve ce théorème que la force vive reste constante pendant la durée du mouvement.

Remarquons de plus que, dans les mêmes hypothèses, et si les coefficients  $h$ ,  $k$ ,  $l$  décroissent quand  $t$  croît, les moments d'inertie décroissent, et la fonction

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

va en croissant.

La première partie de ce corollaire résulte de ce que l'on a

$$A = h^2 b_0 + l^2 c_0, \quad B = l^2 c_0 + h^2 a_0, \quad C = h^2 a_0 + l^2 b_0.$$

Pour démontrer la seconde, remarquons que l'on a, d'après le théorème précédent,

$$\frac{d}{dt}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -p^2 \frac{dA}{dt} - q^2 \frac{dB}{dt} - r^2 \frac{dC}{dt};$$

tous les termes du second membre étant positifs, la proposition est établie.

Cherchons maintenant à étendre au cas actuel la méthode géométrique de Poinsot.

L'ellipsoïde instantané d'inertie, rapporté aux axes mobiles, a pour équation

$$AX_1^2 + BY_1^2 + CZ_1^2 = 1,$$

et l'axe instantané a pour équations par rapport aux mêmes axes

$$\frac{X_1}{p} = \frac{Y_1}{q} = \frac{Z_1}{r} = \frac{\rho}{\omega},$$

si l'on pose  $\rho = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$ ,  $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ . Cherchons le  $\rho$  du point I où cet axe rencontre l'ellipsoïde (*fig. 3*); il est donné par

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \frac{\omega^2}{\rho^2}.$$

Le plan tangent en ce point à l'ellipsoïde a pour équation

$$ApX_1 + BqY_1 + CrZ_1 = \frac{\omega}{\rho};$$

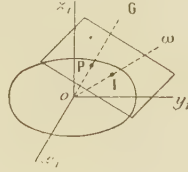
il est donc perpendiculaire à l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, que nous appellerons l'*axe invariable*, et sa distance OP au point O est donnée par

$$\delta = \frac{\frac{\omega}{\rho}}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} = \frac{\omega}{\rho G} = \frac{\sqrt{A p^2 + B q^2 + C r^2}}{G}.$$

Dans le cas où le système est solide,  $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$  se réduit à la

constante  $2H$  des forces vives, et  $\delta$  est constant. Ici  $\delta$  est variable, sa grandeur est proportionnelle à  $\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}$ , et l'ellipsoïde

Fig. 3.



instantané reste en contact avec un plan II qui se déplace parallèlement à lui-même.

Si nous supposons que  $h, k, l$  décroissent quand  $t$  croît, les axes de l'ellipsoïde d'inertie augmentent, et le plan II s'éloigne de l'origine tout en restant parallèle à lui-même.

Quant à la vitesse instantanée de rotation, elle est donnée par

$$\omega = \rho G \dot{\delta} = \rho \sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}.$$

Au lieu d'être, comme dans le cas ordinaire, proportionnelle à la longueur  $\rho$  du rayon vecteur du point de contact, elle est proportionnelle au produit  $\rho \dot{\delta}$  de cette longueur par la distance du plan II à l'origine.

Enfin, l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe invariable a pour cosinus

$$\cos V = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{G\omega} = \frac{G\dot{\delta}^2}{\omega},$$

d'où

$$\omega \cos V = G\dot{\delta}^2.$$

Cette composante instantanée n'est donc plus constante, mais proportionnelle à  $\dot{\delta}^2$ .

On peut continuer à appeler *pôle* le point de contact I de l'ellipsoïde avec le plan II, *polhodie* le lieu de ce point dans le système des axes mobiles, et *herpolhodie* son lieu dans le plan tangent II. On peut donc encore représenter le mouvement par le roulement du cône de sommet O et ayant pour base la polhodie sur le cône de sommet O ayant pour base l'herpolhodie.

On sait que le mouvement de rotation d'un corps solide autour

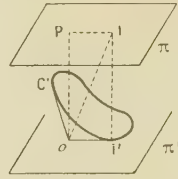
d'un point fixe est susceptible d'une seconde représentation géométrique, due également à Poinso. Cherchons à l'étendre au cas actuel.

Pour cela menons par O le plan  $\Pi'$  parallèle à  $\Pi$ , et que nous appellerons *plan invariable* (fig. 4). Le point I se projette en P sur l'axe du couple résultant, et en I' sur le plan  $\Pi'$ . La rotation totale est

$$\omega = \rho G \delta.$$

On peut la décomposer en deux : la première,  $G\delta \times \delta$  ou  $G\delta^2$ , est dirigée suivant OP; la seconde,  $G\delta \times OI'$ , est dirigée suivant OI'. Si

Fig. 4.



l'on imprime au plan  $\Pi'$  une rotation égale à  $G\delta^2$  autour de OP, le mouvement de l'ellipsoïde par rapport au plan  $\Pi'$  rendu ainsi mobile se réduira à la seule rotation autour de OI'.

Si donc nous construisons le cône C' lieu des diverses positions de OI' dans le système des axes mobiles, le mouvement relatif du corps par rapport au plan  $\Pi'$  se réduira au roulement du cône C' sur le plan  $\Pi'$ , ce roulement s'effectuant avec la vitesse  $G\delta \times OI'$ , pendant que le plan  $\Pi'$  tourne avec la vitesse  $G\delta^2$  autour de sa normale OP.

**Cas où le corps se déforme en restant semblable à lui-même.**

Si les coefficients  $h$ ,  $k$ ,  $l$  sont égaux, on a,  $k$  étant une fonction du temps,

$$x_1 = kx_0, \quad y_1 = ky_0, \quad z_1 = kz_0.$$

On pourrait supposer, plus généralement, que le coefficient  $k$  dépende à la fois du temps  $t$  et de la distance  $\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$  du point  $(x_1, y_1, z_1)$  au point O, mais ce cas se ramène au premier.

En effet, si nous élevons au carré les relations

$$x_1 = kx_0, \quad y_1 = ky_0, \quad z_1 = kz_0,$$

nous avons par addition

$$\rho^2 = k^2 \rho_0^2$$

en posant  $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ . L'équation précédente déterminant  $\rho$  en fonction du temps, on est ramené au cas primitif. On a donc

$$u_1 = x_0 \frac{dk}{dt} + k(qz_0 - ry_0),$$

$$v_1 = y_0 \frac{dk}{dt} + k(rx_0 - pz_0),$$

$$w_1 = z_0 \frac{dk}{dt} + k(py_0 - qx_0).$$

En supposant toujours que  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  soient les axes principaux d'inertie relativement au point  $O$ , on a

$$\Sigma m y_0 z_0 = 0, \quad \Sigma m z_0 x_0 = 0, \quad \Sigma m x_0 y_0 = 0,$$

$$A = k^2 \Sigma m (y_0^2 + z_0^2) = k^2 A_0,$$

$$B = k^2 \Sigma m (z_0^2 + x_0^2) = k^2 B_0,$$

$$C = k^2 \Sigma m (x_0^2 + y_0^2) = k^2 C_0,$$

et la force vive pourra s'écrire

$$2T = k^2 (A_0 p^2 + B_0 q^2 + C_0 r^2) + I_0 \left( \frac{dk}{dt} \right)^2,$$

si l'on pose

$$\Sigma m (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = \frac{A_0 + B_0 + C_0}{2} = I_0.$$

Nous aurons donc

$$\frac{\partial T}{\partial p} = k^2 A_0 p, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = k^2 B_0 q, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = k^2 C_0 r,$$

et les équations du mouvement du corps, supposé toujours soumis à des forces extérieures se réduisant à une force unique passant par le point d'appui, seront

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (k^2 A_0 p) + k^2 (C_0 - B_0) qr = 0, \\ \frac{d}{dt} (k^2 B_0 q) + k^2 (A_0 - C_0) rp = 0, \\ \frac{d}{dt} (k^2 C_0 r) + k^2 (B_0 - A_0) pq = 0. \end{array} \right.$$

En multipliant ces équations par  $k^2 p$ ,  $k^2 q$ ,  $k^2 r$ , nous formons une combinaison intégrable qui nous donne,  $2H$  étant une constante,

$$k^4(A_0 p^2 + B_0 q^2 + C_0 r^2) = 2H.$$

En y joignant l'intégrale (12) qui existe dans tous les cas, nous avons les relations

$$\begin{cases} A_0 p^2 + B_0 q^2 + C_0 r^2 = \frac{2H}{k^4}, \\ A_0^2 p^2 + B_0^2 q^2 + C_0^2 r^2 = \frac{G^2}{k^4}. \end{cases}$$

On peut les utiliser pour une représentation géométrique du mouvement ne faisant intervenir que l'ellipsoïde *initial* d'inertie

$$A_0 X_1^2 + B_0 Y_1^2 + C_0 Z_1^2 = 1.$$

L'axe instantané de rotation le rencontre en un point dont la distance  $\rho_0$  à l'origine vérifie la relation

$$A_0 p^2 + B_0 q^2 + C_0 r^2 = \frac{\omega^2}{\rho_0^2}.$$

On en déduit, par comparaison avec les relations précédentes,

$$\frac{k^2 \omega}{\rho_0} = \sqrt{2H}.$$

Le plan tangent en ce point à l'ellipsoïde considéré a pour équation

$$A_0 p X_1 + B_0 q Y_1 + C_0 r Z_1 = \frac{\omega}{\rho_0};$$

il est donc perpendiculaire à l'axe invariable puisque l'on a

$$\frac{A}{A_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{C}{C_0} = k^2.$$

Sa distance à l'origine a pour expression

$$\delta_0 = \frac{\frac{\omega}{\rho_0}}{\sqrt{A_0^2 p^2 + B_0^2 q^2 + C_0^2 r^2}} = \frac{k^2 \omega}{\rho_0 G} = \frac{\sqrt{2H}}{G}.$$

Cette distance est donc constante, et l'ellipsoïde *initial* reste en contact avec un plan fixe II.

Quant à la vitesse angulaire instantanée, elle est donnée par

$$\omega = \frac{\rho_0 \mathbf{G} \delta_0}{k^2} = \frac{\rho_0 \sqrt{2\mathbf{H}}}{k^2} = \rho_0 \sqrt{\mathbf{A}_0 p^2 + \mathbf{B}_0 q^2 + \mathbf{C}_0 r^2}.$$

On peut par suite représenter le mouvement par le roulement du cône ayant pour base la polhodie sur le cône ayant pour base l'herpolhodie, ces deux courbes étant relatives à l'ellipsoïde *initial* d'inertie et au plan II.

**Application à l'étude du mouvement de la Terre,**  
dans l'hypothèse où elle se refroidirait lentement,  
en restant semblable à elle-même.

Soit O le centre de la Terre (*fig. 5*) et Ox, Oy, Oz trois axes de directions invariables. Le plan des xy est parallèle au plan de l'écliptique d'une certaine époque, Ox étant dirigé vers l'équinoxe de cette époque. Les axes mobiles Ox<sub>1</sub>, Oy<sub>1</sub>, Oz<sub>1</sub> ont pour directions celles des axes principaux d'inertie, qui demeurent fixes à l'intérieur du globe. Les relations

$$x_1 = kx_0, \quad y_1 = ky_0, \quad z_1 = kz_0$$

conduisent, nous l'avons vu, à l'expression suivante de la force vive :

$$2\mathbf{T} = k^2(\mathbf{A}_0 p^2 + \mathbf{B}_0 q^2 + \mathbf{C}_0 r^2) + \mathbf{I}_0 \left( \frac{dk}{dt} \right)^2.$$

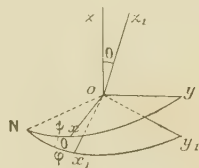
Nous introduirons les angles d'Euler  $\psi, \theta, \varphi$ , qui donnent comme on sait :

$$(13) \quad \begin{cases} p = \psi' \sin \theta \sin \varphi - \theta' \cos \varphi, & \psi' = \frac{d\psi}{dt}, \\ q = \psi' \sin \theta \cos \varphi + \theta' \sin \varphi, & \theta' = \frac{d\theta}{dt}, \\ r = \varphi' - \psi' \cos \theta, & \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Le point N est le *nœud descendant* du grand cercle  $x_1 y_1$  par rapport

à  $xy$ ; l'angle  $\widehat{XON} = \psi$ , d'origine  $x$ , se compte en sens inverse de  $xy$  de 0 à  $2\pi$ ; l'angle  $\widehat{xNx_i} = \theta$  est compris entre 0 et  $\pi$ ; l'angle  $\widehat{NOx_i} = \varphi$ , d'origine  $N$ , se compte dans le sens  $x_i y_i$  de 0 à  $2\pi$ .

Fig. 5.



Nous supposons que la fonction des forces  $U$  a la même forme que dans le cas où la Terre est un solide invariable;  $L_i$ ,  $M_i$ ,  $N_i$  auront donc la même valeur que dans ce dernier cas. Ainsi les équations du mouvement de rotation seront

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(k^2 A_0 p) + k^2 (C_0 - B_0) q r = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) - \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt}(k^2 B_0 q) + k^2 (A_0 - C_0) r p = \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt}(k^2 C_0 r) + k^2 (B_0 - A_0) p q = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

#### Mouvement non troublé.

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de forces extérieures. Les équations du mouvement se réduisent alors aux équations (8). Effectuons le changement de variables

$$k^2 p = p_0, \quad k^2 q = q_0, \quad k^2 r = r_0, \quad dt = k^2 dt_0,$$

d'où

$$t_0 = \int \frac{dt}{k^2};$$

ces équations deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 \frac{dp_0}{dt_0} + (C_0 - B_0) q_0 r_0 = 0, \\ B_0 \frac{dq_0}{dt_0} + (A_0 - C_0) r_0 p_0 = 0, \\ C_0 \frac{dr_0}{dt_0} + (B_0 - A_0) p_0 q_0 = 0. \end{array} \right.$$

On est ramené au cas ordinaire. Ces équations admettent donc les deux intégrales

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 p_0^2 + B_0 q_0^2 + C_0 r_0^2 = 2H, \\ A_0^2 p_0^2 + B_0^2 q_0^2 + C_0^2 r_0^2 = G^2, \end{array} \right.$$

qui sont au fond les mêmes que les intégrales de la page 20. Ces équations, jointes à l'une des équations précédentes, déterminent  $p_0, q_0, r_0$ . On en déduira  $\psi, \theta, \varphi$  en fonction de  $t_0$  par les relations (13) dans lesquelles on fait le changement de variables précédent :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt_0} = q_0 \sin \varphi - p_0 \cos \varphi, \\ \sin \theta \frac{d\psi}{dt_0} = p_0 \sin \varphi + q_0 \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt_0} = r_0 + \cot \theta (p_0 \sin \varphi + q_0 \cos \varphi). \end{array} \right.$$

Suivant la méthode ordinaire, nous ne ferons pas l'intégration directe de ces équations, mais nous rapporterons les axes mobiles au *plan invariable* et à une droite déterminée de ce plan. Soit  $Ox_0y_0z_0$  ce nouveau trièdre. En désignant par  $\psi_0, \theta_0, \varphi_0$ , ce que deviennent  $\psi, \theta, \varphi$  quand on rapporte les axes mobiles aux nouveaux axes,

$$\psi_0 = \widehat{x_0 O H}, \quad \theta_0 = \widehat{N' H N}, \quad \varphi_0 = \widehat{H O x_1},$$

prenant pour  $x_0$  la position du point H pour  $t_0 = -h$ , et posant

$$\widehat{x O N'} = \psi', \quad \widehat{x N' K} = \theta', \quad \widehat{N' O x_0} =$$

nous avons finalement l'ensemble des formules suivantes :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{\frac{C_0 - B_0}{A_0}}, \quad b = \sqrt{\frac{C_0 - A_0}{B_0}}, \quad c = \sqrt{\frac{B_0 - A_0}{C_0}}, \\ \omega' = \sqrt{\frac{G^2 - 2 A_0 H}{C_0 (C_0 - A_0)}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{C_0 - 2 C_0 H - G^2}{C_0 - B_0}}, \\ ab \omega' (t_0 + h) = \int_0^\chi \frac{d\chi}{\sqrt{1 - c^2 \sigma^2 \sin^2 \chi}}, \\ p = \frac{\omega'}{k^2} a \sigma \cos \chi, \quad q = \frac{\omega'}{k^2} b \sigma \sin \chi, \quad r = \frac{\omega'}{k^2} \sqrt{1 - c^2 \sigma^2 \sin^2 \chi}, \\ \omega = \frac{\omega'}{k^2} \sqrt{1 + a^2 \sigma^2 - a^2 b^2 c^2 \sigma^2 \sin^2 \chi}, \\ \tan \varphi_0 = \frac{A_0 a}{B_0 b} \cot \chi, \\ \sin^2 \theta_0 = \sigma^2 \frac{A_0^2 a^2 + C_0^2 c^2 \sin^2 \chi}{C_0^2 + A_0^2 a^2 \sigma^2}, \\ \psi_0 = - \frac{G}{ab \omega'} \int_0^\chi \frac{A_0 a^2 \cos^2 \chi + B_0 b^2 \sin^2 \chi}{A_0^2 a^2 \cos^2 \chi + B_0^2 b^2 \sin^2 \chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - c^2 \sigma^2 \sin^2 \chi}} \end{array} \right.$$

Des cinq premières relations on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{1 - b^2} = \frac{B_0}{1 - a^2} = \frac{C_0}{1 - a^2 b^2}, \quad c^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 - a^2 b^2}, \\ G^2 = \omega'^2 (C_0^2 + A_0^2 a^2 \sigma^2), \quad 2 H = \omega'^2 (C_0 + A_0 a^2 \sigma^2). \end{array} \right.$$

On a ensuite  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , par les formules connues de trigonométrie sphérique :

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \sin \theta \sin (\psi - \psi') = \sin \theta_0 \sin (\psi_0 - g), \\ \sin \theta \cos (\psi - \psi') = \cos \theta_0 \sin \theta' + \sin \theta_0 \cos \theta' \cos (\psi_0 - g), \\ \cos \theta = \cos \theta_0 \cos \theta' - \sin \theta_0 \sin \theta' \cos (\psi_0 - g), \\ \sin \theta \sin (\varphi_0 - \varphi) = \sin \theta' \sin (\psi_0 - g), \\ \sin \theta \cos (\varphi_0 - \varphi) = \sin \theta_0 \cos \theta' + \cos \theta_0 \sin \theta' \cos (\psi_0 - g), \end{array} \right.$$

qui résultent de la considération du triangle N'NH.

Nous avons ainsi, dans le mouvement non troublé, les expressions de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , en fonction de  $t$  et des six constantes arbitraires  $\omega'$ ,  $\sigma$ ,  $h$ ,  $g$ ,  $\theta'$ ,  $\psi'$ .

Nous allons montrer que ces six constantes forment, comme dans le



Il faut à présent former la fonction

$$K = \psi_1 \psi' + \theta_1 \theta' + \varphi_1 \varphi' - T.$$

Comme la fonction  $T$  est une fonction quadratique de  $p, q, r$ , et par suite de  $\psi', \theta', \varphi'$ , les relations (17) sont linéaires par rapport à ces dérivées et peuvent se résoudre facilement : il suffira de porter leurs valeurs dans l'expression de  $K$ . Abrégeons en remarquant que la fonction

$${}_2T_0 = {}_2T - I_0 \left( \frac{dk}{dt} \right)^2$$

est homogène et du second degré en  $\psi', \theta', \varphi'$  et qu'on a, d'après le théorème d'Euler,

$${}_2T_0 = \psi_1 \psi' + \theta_1 \theta' + \varphi_1 \varphi'.$$

On a donc

$$K = {}_2T_0 - T = T - I_0 \left( \frac{dk}{dt} \right)^2$$

ou enfin

$$(19) \quad K = \frac{1}{2k^2} \left[ \frac{1}{A_0} \left( \frac{\psi_1 + \varphi_1 \cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi - \theta_1 \cos \varphi \right)^2 + \frac{1}{B_0} \left( \frac{\psi_1 + \varphi_1 \cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi + \theta_1 \sin \varphi \right)^2 + \frac{1}{C_0} \varphi_1^2 \right] - \frac{I_0}{2} \left( \frac{dk}{dt} \right)^2.$$

La fonction d'Hamilton étant appelée  $\Omega$ , les équations canoniques sont

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = K - U, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}. \end{array} \right.$$

Actuellement, comme il n'y a pas de forces extérieures, on a  $U = 0$ . La méthode d'intégration de Jacobi donne l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial V}{\partial t} + K \left( t, \psi, \theta, \varphi, \frac{\partial V}{\partial \psi}, \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(21) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2k^2} \left\{ \frac{1}{A_0} \left[ \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \theta} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{B_0} \left[ \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{C_0} \left( \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} - \frac{I_0}{2} \left( \frac{dk}{dt} \right)^2 = 0.$$

Il faudrait trouver de cette équation une intégrale renfermant trois constantes arbitraires non simplement additives F, G, H. Si V est cette intégrale et si  $\psi$ ,  $g$ ,  $h$  sont trois nouvelles constantes, les équations *finies* du mouvement seront

$$(22) \quad \frac{\partial V}{\partial F} = \psi, \quad \frac{\partial V}{\partial G} = g, \quad \frac{\partial V}{\partial H} = h.$$

Avec les équations

$$(23) \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \psi_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \theta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \varphi_1,$$

nous avons six relations d'où nous pouvons tirer les valeurs de  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\varphi_1$  susceptibles de s'étendre au cas où U n'est pas nul par la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Or l'équation (21) ressemble beaucoup à celle qu'on rencontre dans le cas du solide invariable, sauf que dans cette dernière le temps ne figure pas explicitement, tandis qu'il figure dans la nôtre. Des changements de variables vont nous en débarrasser. Considérons la fonction  $\beta$  de  $t$  définie par

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{I_0}{2} \left( \frac{dk}{dt} \right)^2$$

et posons

$$(24) \quad V - \beta = W,$$

notre équation s'écrira

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2k^2} (\dots) = 0,$$

ou en faisant le changement de variable déjà rencontré dans l'autre

méthode

$$dt = k^2 dt_0,$$

$$(25) \quad \frac{\partial W}{\partial t_0} + \frac{1}{2A_0} \left[ \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial W}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) - \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial \theta} \right]^2 \\ + \frac{1}{2B_0} \left[ \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial W}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{2C_0} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 = 0.$$

Cette équation est absolument semblable à celle du cas classique. Suivant la méthode de Serret, perfectionnée par M. Radau, il suffit de trouver la variation  $\delta W$  de l'intégrale cherchée lorsqu'on fait varier  $F, G, H$ , sans toucher à  $t_0, \psi, \theta, \varphi$ . Le temps  $t_0$  restant constant dans ce calcul, nous aurons

$$\delta W = \delta V, \quad \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{\partial V}{\partial F}, \quad \frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial V}{\partial G}, \quad \frac{\partial W}{\partial H} = \frac{\partial V}{\partial H},$$

et, par suite, les constantes  $F, G, H, \psi', g, h$ , forment encore un système canonique. D'après la remarque de M. Radau, on a

$$(26) \quad F = -G \cos \theta'.$$

Finalement les formules (15) et (16) obtenues par l'autre méthode, dans lesquelles on remplace  $\theta'$  par sa valeur tirée de la relation (26), contiennent six constantes  $F, G, H, \psi', g, h$  formant un système canonique. Il en résulte qu'on pourra conserver les mêmes formules dans le cas où la fonction  $U$  n'est pas nulle, à condition d'y considérer  $F, G, H, \psi', g, h$  comme de nouvelles fonctions, ainsi qu'on le verra plus loin.

#### Formules approchées dans le cas du mouvement non troublé.

Dans les formules (15) entrent  $\sin \chi$  et  $\cos \chi$  qui sont des fonctions doublement périodiques de  $t$  : soit  $2\pi$  leur période réelle. Admettons, vu la petitesse des forces, que le mouvement réel de la Terre diffère peu du mouvement plus simple correspondant au cas où les forces sont nulles. Appelons  $OI_1$  et  $OI_2$  les deux axes de rotation aux temps correspondant à  $t_0 = -h$  et  $t_0 = -h + \tau$  : les droites  $OI_1$  et  $OI_2$  ont respectivement pour cosinus directeurs  $\left( \frac{\omega' a \sigma}{\omega}, 0, \frac{\omega'}{\omega} \right)$  et  $\left( \frac{-\omega' a \sigma}{\omega}, 0, \frac{\omega'}{\omega} \right)$ ,

car les formules (15) donnent à ces deux instants  $r_1 = r_2 = \omega'$ .  
Donc  $\cos \widehat{I_1 O I_2} = \frac{\omega'^2(1 - a^2 \sigma^2)}{\omega^2}$ . Comme, aux deux instants considérés, les formules (15) montrent que l'on a  $\omega = \omega' \sqrt{1 + a^2 \sigma^2}$ , on a

$$\cos \widehat{I_1 O I_2} = \frac{1 - a^2 \sigma^2}{1 + a^2 \sigma^2} = 1 - 2a^2 \sigma^2 + \dots = 1 - \frac{\widehat{I_1 O I_2}^2}{2}.$$

On a donc, par comparaison,

$$2a\sigma = \widehat{I_1 O I_2}$$

Les erreurs d'observation étant certainement inférieures à  $1''$ , on peut écrire  $2a\sigma < \sin 1''$ , ou  $\sigma < \frac{\sin 1''}{2a}$ .

Nous avons posé  $a = \sqrt{\frac{C_0 - B_0}{A_0}}$ , lequel, vu l'homothétie, est toujours égal à  $\sqrt{\frac{C - B}{A}}$ . D'après la théorie de la figure de la Terre, le nombre  $\frac{C - A}{C}$ , voisin de  $\frac{C - B}{A}$ , est voisin de  $\frac{1}{300}$ . Faisant les calculs, nous trouvons  $\sigma^2 < \frac{2}{10^9}$ . De plus,  $c^2 = \frac{B_0 - A_0}{C_0} = \frac{B - A}{C}$  est, d'après les observations du pendule, notablement inférieur à  $\frac{1}{300}$ . Pour ces deux raisons, le carré  $c^2 \sigma^2$  du module est très petit, et l'on peut substituer aux formules rigoureuses (15) des formules approchées.

Si alors nous prenons la formule

$$\omega' ab(t_0 + h) = \int_0^\chi \frac{d\chi}{\sqrt{1 - c^2 \sigma^2 \sin^2 \chi}},$$

nous pourrions, en développant le radical et négligeant la quatrième puissance du module, prendre

$$\left(1 + \frac{1}{4} c^2 \sigma^2\right) \chi - \frac{1}{8} c^2 \sigma^2 \sin 2\chi = \omega' ab(t_0 + h).$$

Posons

$$(27) \quad \frac{\omega' ab}{1 + \frac{1}{4} c^2 \sigma^2} (t_0 + h) = u \quad \left(t_0 = \int \frac{dt}{k^2}\right),$$

nous pourrons écrire

$$\chi = u + \frac{1}{8} c^2 \sigma^2 \sin^2 u$$

et nous trouverons

$$\begin{aligned} p &= \frac{\omega'}{k^2} a \sigma \cos u, & q &= \frac{\omega'}{k^2} b \sigma \sin u; \\ r &= \frac{\omega'}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{4} c^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} c^2 \sigma^2 \cos 2u \right) \end{aligned}$$

en négligeant les termes en  $\sigma^4$ .

Nous trouverons maintenant, ce qui montre que  $\theta_0$  est très petit,

$$\sin \theta_0 = \frac{A_0}{C_0} a \sigma,$$

puis, en suivant la marche ordinaire,

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{n}{2} - u - \frac{c^2}{4a^2} \sin 2u, \\ \psi_0 &= \varphi_0 + \frac{n}{2} - \omega' \left( 1 + \frac{A_0 c^2 \sigma^2}{2C_0} \right) (t_0 + h). \end{aligned}$$

Arrivons enfin aux expressions approchées de  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , et nous aurons en résumé les formules approchées suivantes :

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \varphi' - \frac{A_0 a}{C_0} \sigma \cot \theta' \cos(u + \varphi') + \dots, \\ \theta &= \theta' - \frac{A_0 a}{C_0} \sigma \sin(u + \varphi') + \dots, \\ \psi &= \psi' - \frac{A_0 a}{C_0} \frac{\sigma}{\sin \theta'} \cos(u + \varphi') + \dots, \end{aligned} \right.$$

et aussi

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= a b n'_1 (t_0 + h), & \varphi' &= n_1 (t_0 + h) + g - \frac{n}{2}, \\ n'_1 &= \omega' \left( 1 - \frac{1}{4} c^2 \sigma^2 \right), & n_1 &= \omega' \left( 1 + \frac{A_0 a^2}{2C_0} \sigma^2 \right), \\ p &= \frac{\omega'}{k^2} a \sigma \cos u, & q &= \frac{\omega'}{k^2} b \sigma \sin u, \\ r &= \frac{\omega'}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{4} c^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} c^2 \sigma^2 \cos 2u \right). \end{aligned} \right.$$

Il est entendu que dans les égalités précédentes nous avons mis  $t_0$  pour abréger, mais nous devons toujours considérer  $t_0$  comme égal à l'intégrale  $\int \frac{dt}{k^2}$ . On peut prévoir ainsi, vu la petitesse des forces, petitesse sur laquelle nous reviendrons plus loin,  $p, q, r$  et par suite la rotation  $\omega$  iront dans le mouvement réel en augmentant, comme dans égalités ( $\beta$ ).

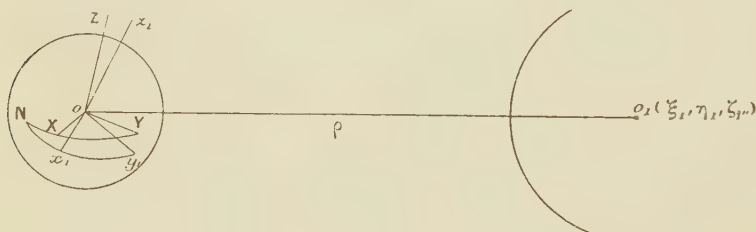
**Mouvement troublé. Expression de la fonction perturbatrice.**

Si nous rétablissons les forces extérieures, il faut prendre les équations complètes de la page 22 et se préoccuper d'abord de la nature de la fonction des forces  $U$ . Conservant les notations générales rappelées dans le Traité de Tisserand (p. 378), nous prendrons

$$U = \frac{3}{2} f M_1 \frac{(C-A)\xi_1^2 + (C-B)\eta_1^2}{\rho^5} + \frac{3}{2} f M_1' \frac{(C-A)\xi_1'^2 + (C-B)\eta_1'^2}{\rho'^5},$$

en négligeant les termes indépendants de  $\varphi, \theta, \psi$ , qui n'interviennent pas dans les seconds membres des équations considérées. Dans cette

Fig. 7.



expression, nous désignons par  $f$  le coefficient constant de la loi de Newton, par  $A, B, C$  les moments d'inertie principaux de la Terre, par  $M_1$  la masse du Soleil, par  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  les coordonnées du centre  $O_1$  du Soleil par rapport aux axes  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  qui sont les axes principaux d'inertie pour le centre  $O$  de la Terre, par  $\rho$  la distance du centre du Soleil au centre de la Terre, et par  $M_1', \xi_1', \eta_1', \zeta_1', \rho'$  les quantités

analogues relatives à la Lune (*fig. 7*). Si nous y remplaçons A, B, C par  $k^2 A_0$ ,  $k^2 B_0$ ,  $k^2 C_0$ , nous avons

$$U = k^2 \left[ \frac{3}{2} f M_1 \frac{(C_0 - A_0) \xi_1^2 + (C_0 - B_0) \eta_1^2}{\rho^5} + \frac{3}{2} f M'_1 \frac{(C_0 - A_0) \xi_1'^2 + (C_0 - B_0) \eta_1'^2}{\rho'^5} \right]$$

ou, en désignant par  $U_0$  la quantité entre crochets

$$(28) \quad U_0 = \frac{3}{2} f M_1 \frac{(C_0 - A_0) \xi_1^2 + (C_0 - B_0) \eta_1^2}{\rho^5} + \frac{3}{2} f M'_1 \frac{(C_0 - A_0) \xi_1'^2 + (C_0 - B_0) \eta_1'^2}{\rho'^5},$$

$$(29) \quad U = k^2 U_0.$$

Nous sommes ainsi conduits à prendre pour  $U_0$  le développement connu de la fonction perturbatrice, ce que nous ferons ultérieurement. Les équations de la page 22 deviennent ainsi

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (k^2 A_0 p) + k^2 (C_0 - B_0) q r = k^2 \left[ \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) - \cos \varphi \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right], \\ \frac{d}{dt} (k^2 B_0 q) + k^2 (A_0 - C_0) r p = k^2 \left[ \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) + \sin \varphi \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right], \\ \frac{d}{dt} (k^2 C_0 r) + k^2 (B_0 - A_0) p q = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Comme les constantes F, G, H,  $\psi'$ ,  $g$ ,  $h$  forment un système canonique, il s'ensuit, ainsi que nous l'avons dit plus haut, qu'on peut conserver les formules (15) et (16) et surtout les formules approchées ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ), à condition d'y considérer F, G, H,  $\psi'$ ,  $g$  et  $h$  comme de nouvelles fonctions déterminées par les relations

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \frac{dF}{dt} = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial \psi}, & \frac{dG}{dt} = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial h}, \\ \frac{d\psi'}{dt} = -k^2 \frac{\partial U_0}{\partial F}, & \frac{dg}{dt} = -k^2 \frac{\partial U_0}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} = -k^2 \frac{\partial U_0}{\partial H}, \end{cases}$$

suivant la méthode de variation des constantes arbitraires. Les quantités  $\omega'$  et  $\sigma$ , et par suite  $n_1$  et  $n'_1$  sont des fonctions de G et H.

Suivant la méthode habituelle, nous regarderons, dans une première approximation, F, G, H,  $\psi'$ ,  $g$ ,  $h$  comme des constantes dans les seconds membres des équations ( $\gamma$ ), et de simples quadratures donneront les valeurs des mêmes quantités dans la seconde approxima-

tion. On verra plus loin que  $U_0$  est une série de cosinus d'arguments qui sont des fonctions linéaires de  $u$  et  $\varphi'$ , d'où, pour la formation de  $\frac{\partial U_0}{\partial G}$  et  $\frac{\partial U_0}{\partial H}$ , la nécessité de changements de variables.

### Premier changement de variables.

Dans ce premier changement de variables, les variables anciennes sont remplacées par  $F, G, H, \psi', \varepsilon'_1, \varepsilon_1$ .

Remarquons que, d'après les formules ( $\beta$ ), on peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi' &= \int n_1 dt_0 + \int t_0 dn_1 + n_1 h + g - \frac{\pi}{2} = \int n_1 \frac{dt}{K^2} + \int \int \frac{dt dn_1}{k^2} + n_1 h + g - \frac{\pi}{2}, \\ u &= ab \left( \int n'_1 dt_0 + \int t_0 dn'_1 + n'_1 h \right) = ab \left( \int n'_1 \frac{dt}{K^2} + \int \int \frac{dt dn'_1}{k^2} + n'_1 h \right).\end{aligned}$$

Posons

$$(31) \quad \varepsilon_1 = \int t_0 dn_1 + n_1 h + g - \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon'_1 = \int t_0 dn'_1 + n'_1 h,$$

et nous pourrions écrire

$$(32) \quad \varphi' = \int n_1 dt_0 + \varepsilon_1, \quad u = ab \left( \int n'_1 dt_0 + \varepsilon'_1 \right).$$

Les variables  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon'_1$  remplacent  $g$  et  $h$ .

Désignons, suivant l'usage, par  $\left(\frac{\partial U_0}{\partial G}\right)$  et  $\left(\frac{\partial U_0}{\partial H}\right)$  les dérivées de  $U_0$  par rapport à  $G$  et à  $H$  en tant que ces quantités figurent directement dans  $U_0$  et non dans  $n_1$  et  $n'_1$ , et utilisons la relation de Serret (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXXV)

$$\frac{\partial \frac{1}{n_1}}{\partial G} + \frac{\partial \frac{n_1}{n'_1}}{\partial H} = 0,$$

nous arriverons finalement aux relations ci-dessous :

$$(33) \quad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = k^2 \left[ -n_1 \left( \frac{\partial U_0}{\partial H} \right) - \left( \frac{\partial U_0}{\partial G} \right) \right], \quad \frac{d\varepsilon'_1}{dt} = -k^2 n'_1 \left( \frac{\partial U_0}{\partial H} \right),$$

$$(34) \quad \frac{dG}{dt} = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1}, \quad \frac{dH}{dt} = k^2 \left( n_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + n'_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon'_1} \right),$$

$$(35) \quad \frac{dF}{dt} = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial \psi'}, \quad \frac{d\psi'}{dt} = -k^2 \frac{\partial U_0}{\partial F}.$$

Telles sont les équations cherchées.

### Second changement de variables.

Ici les variables vont être  $\theta'$ ,  $n$ ,  $\sigma$ ,  $\psi'$ ,  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon_1$ . Les variables  $n$  et  $\sigma$  vont remplacer  $G$  et  $H$ , et  $\theta'$  se substituera à  $F$ . Posons

$$(36) \quad 2H = C_0 n^2$$

et utilisons la relation (26) qui donne

$$\cos \theta' = -\frac{F}{G},$$

d'où

$$d\theta' = \frac{dF + \cos \theta' dG}{G \sin \theta'}.$$

Or  $\omega'$  et  $\sigma$  dépendent de  $G$  et de  $H$  par les formules (15) qui donnent

$$d\omega' = \frac{G dG - A_0 dH}{C_0(C_0 - A_0)\omega'},$$

$$\sigma d\sigma = G \frac{G dH - 2H dG}{C_0(C_0 - A_0)(C_0 - B_0)\omega'^4},$$

et si nous désignons par  $\left( \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right)$  la dérivée de  $U_0$  par rapport à  $\sigma$  quand on ne fait pas varier  $\sigma$  dans  $u$  et  $\varphi'$ , nous arrivons aux résultats

suivants :

$$(\delta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi'}{dt} = - \frac{k^2}{G \sin \theta'} \frac{\partial U_0}{\partial \theta'}, \\ \frac{d\theta'}{dt} = \frac{k^2}{G \sin \theta'} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi'} + \cos \theta' \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} \right), \\ \sigma \frac{d\sigma}{dt} = \frac{k^2 G}{C_0 (C_0 - A_0) (C_0 - B_0) \omega'^4} \left[ (n_1 G - C_0 n^2) \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + n'_1 G \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon'_1} \right], \\ \frac{d\varepsilon'_1}{dt} = \frac{-k^2 n'_1 G^2}{C_0 (C_0 - A_0) (C_0 - B_0) \omega'^4} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{d\varepsilon_1}{dt} = - \frac{k^2 \cos \theta'}{G \sin \theta'} \frac{\partial U_0}{\partial \theta'} + \frac{k^2 G (n^2 C_0 - n_1 G)}{C_0 (C_0 - A_0) (C_0 - B_0) \omega'^4} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right), \\ C_0 \frac{dn}{dt} = k^2 \left( \frac{n_1}{n} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + \frac{n'_1}{n} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon'_1} \right). \end{array} \right.$$

Comme dans le cas classique, il n'y a pas d'intérêt à conserver les formules précédentes, qui sont d'accord avec celles que Serret a établies dans son Mémoire déjà cité. On montrera plus loin que  $\sigma$  reste toujours extrêmement petit : on peut donc négliger  $\sigma^2$  dans les coefficients différentiels, et prendre dans les formules ( $\beta$ )

$$n_1 = n,$$

en remarquant que la différence  $n_1 - n$  est de l'ordre de  $\alpha^4 b^2 \sigma^4$ , et

$$n'_1 = n \left( 1 - \frac{2C_0 - A_0 - B_0}{4C_0} \sigma^2 + \dots \right).$$

Tous calculs faits, si l'on désigne par  $\lambda$  un coefficient presque inutile à former, on trouve que les formules ( $\delta$ ) deviennent

$$(\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi'}{dt} = \frac{-k^2}{C_0 n \sin \theta'} \frac{\partial U_0}{\partial \theta'}, \\ \frac{d\theta'}{dt} = \frac{k^2}{C_0 n \sin \theta'} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi'} + \cos \theta' \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} \right), \\ \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{-k^2 \cos \theta'}{C_0 n \sin \theta'} \frac{\partial U_0}{\partial \theta'} + \frac{k^2}{2C_0 n} \sigma \left( \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{d\varepsilon'_1}{dt} = \frac{-k^2 C_0 (1 + \lambda \sigma^2)}{A_0 B_0 \alpha^2 b^2 n} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{d\sigma}{dt} = \frac{C_0 (1 + \lambda \sigma^2)}{A_0 B_0 \alpha^2 b^2 n} \frac{k^2}{\sigma} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon'_1} - \frac{k^2}{2C_0 n} \sigma \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1}, \\ C_0 \frac{dn}{dt} = k^2 \left( \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon'_1} \right). \end{array} \right.$$

Mais la présence du diviseur  $\sigma$  qui se trouve avec  $\left(\frac{\partial U_0}{\partial \sigma}\right)$  et  $\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon'_1}$  est encore gênante. Pour y remédier, effectuons un dernier changement de variables.

**Troisième changement de variables.**

Les variables définitives seront  $\theta', n, f_1, \psi', f'_1, \varepsilon_1$ ;  $\sigma$  et  $\varepsilon'_1$  seront remplacés par de nouvelles variables  $f_1$  et  $f'_1$  définies par

$$\sigma \sin(ab\varepsilon'_1) = f_1, \quad \sigma \cos(ab\varepsilon'_1) = f'_1.$$

Utilisant la formule de la dérivée d'un produit et remplaçant  $\frac{d\sigma}{dt}$  et  $\frac{d\varepsilon'_1}{dt}$  par leurs valeurs ci-dessus, on a  $\frac{df_1}{dt}$  et  $\frac{df'_1}{dt}$ . Si l'on tient compte de ce que

$$\sigma = \sqrt{f_1^2 + f_1'^2}, \quad \cot(ab\varepsilon'_1) = \frac{f'_1}{f_1},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= -\frac{k^2}{2C_0n} f_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} - \frac{C_0(1+\lambda\sigma^2)}{A_0B_0abn} \left[ -\frac{k^2}{ab\sigma} \sin(ab\varepsilon'_1) \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon'_1} + k^2 \cos(ab\varepsilon'_1) \left( \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right) \right], \\ \frac{df'_1}{dt} &= -\frac{k^2}{2C_0n} f'_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + \frac{C_0(1+\lambda\sigma^2)}{A_0B_0abn} \left[ \frac{k^2}{ab\sigma} \cos(ab\varepsilon'_1) \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon'_1} + k^2 \sin(ab\varepsilon'_1) \left( \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= -\frac{k^2}{2C_0n} f_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} - \frac{k^2 C_0(1+\lambda\sigma^2)}{A_0B_0abn} \frac{\partial U_0}{\partial f'_1}, \\ \frac{df'_1}{dt} &= -\frac{k^2}{2C_0n} f'_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + \frac{k^2 C_0(1+\lambda\sigma^2)}{A_0B_0abn} \frac{\partial U_0}{\partial f_1}, \end{aligned}$$

et la relation

$$\sigma \left( \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right) = f_1 \frac{\partial U_0}{\partial f_1} + f'_1 \frac{\partial U_0}{\partial f'_1}.$$

Les formules (32) donnent ensuite

$$u + \varphi' = u_1 + ab\varepsilon'_1,$$

en posant

$$u_1 = \varepsilon_1 + \int \frac{n_1 dt}{k^2} + ab \int \frac{n'_1 dt}{k^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma \sin(u + \varphi') &= f_1 \cos u_1 + f'_1 \sin u_1, \\ \sigma \cos(u + \varphi') &= f_1 \sin u_1 + f'_1 \cos u_1. \end{aligned}$$

Ces relations permettent d'introduire dans  $U_0$  les variables  $f_1$  et  $f'_1$ , et nous aurons en définitive les formules suivantes :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi'}{dt} = \frac{-k^2}{C_0 n \sin \theta'} \frac{\partial U_0}{\partial \theta'}, \\ \frac{d\theta'}{dt} = \frac{k^2}{C_0 n \sin \theta'} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi'} + \cos \theta' \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} \right), \\ \frac{df_1}{dt} = \frac{-k^2}{2 C_0 n} f_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} - \frac{k^2 C_0}{A_0 B_0 a b n} \frac{\partial U_0}{\partial f'_1}, \\ \frac{df'_1}{dt} = \frac{-k^2}{2 C_0 n} f'_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + \frac{k^2 C_0}{A_0 B_0 a b n} \frac{\partial U_0}{\partial f_1}, \\ \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{-k^2 \cos \theta'}{C_0 n \sin \theta'} \frac{\partial U_0}{\partial \theta'} + \frac{k^2}{2 C_0 n} \left( f_1 \frac{\partial U_0}{\partial f'_1} + f'_1 \frac{\partial U_0}{\partial f_1} \right), \\ C_0 \frac{dn}{dt} = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + k^2 a b \left( f'_1 \frac{\partial U_0}{\partial f_1} - f_1 \frac{\partial U_0}{\partial f'_1} \right). \end{array} \right.$$

Dans les troisième et quatrième égalités, qui reproduisent les expressions antérieures de  $\frac{df_1}{dt}$  et  $\frac{df'_1}{dt}$ , on a remplacé  $\sigma^2$  par 0. En joignant aux formules (a) des expressions antérieures, on a également

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \sin(ab\varepsilon'_1) = f_1, \quad \sigma \cos(ab\varepsilon'_1) = f'_1, \\ n'_1 = n \left( 1 - \frac{2C_0 - A_0 - B_0}{4C_0} \sigma^2 + \dots \right), \\ u_1 = \varepsilon_1 + \int \left( \frac{n}{k^2} + ab \frac{n'_1}{k^2} \right) dt, \\ \theta = \theta' - \frac{A_0 a}{C_0} (f_1 \cos u_1 + f'_1 \sin u_1), \\ \psi = \psi' + \frac{A_0 a}{C_0 \sin \theta'} (f_1 \sin u_1 - f'_1 \cos u_1), \\ \varphi = \varepsilon_1 + \int \frac{n}{k^2} dt + \frac{A_0 a}{C_0} \cot \theta' (f_1 \sin u_1 - f'_1 \cos u_1) \end{array} \right.$$

et

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{n}{k^2} a \sigma \cos u, \quad q = \frac{n}{k^2} b \sigma \sin u, \\ r = \frac{n}{k^2} \left( 1 - \frac{2C_0 - A_0 - B_0}{4C_0} \sigma^2 + \frac{1}{4} c^2 \sigma^2 \cos 2u \right) = \frac{n'_1}{k^2} \left( 1 + \frac{1}{4} c^2 \sigma^2 \cos 2u \right), \\ \omega = \frac{n}{k^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{A_0 + B_0}{C_0} a^2 b^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 c^2 \sigma^2 \cos 2u \right), \\ u = ab \left( \varepsilon'_1 + \int \frac{n'_1}{k^2} dt \right). \end{array} \right.$$

On voit que toutes ces formules présentent la plus grande analogie avec les formules classiques.

### Développement de la fonction perturbatrice.

Nous avons précédemment été conduits à poser  $U = k^2 U_0$ , avec

$$U_0 = \frac{3}{2} f M_1 \frac{(C_0 - A_0) \xi_1^2 + (C_0 - B_0) \eta_1^2}{\rho^5} + \frac{3}{2} f M_1' \frac{(C_0 - A_0) \xi_1'^2 + (C_0 - B_0) \eta_1'^2}{\rho'^5},$$

de sorte que tout revient à utiliser pour  $U_0$  le développement ordinaire.

Rappelons qu'on désigne par  $m$  le moyen mouvement de la Terre dans son mouvement de translation autour du Soleil, par  $\rho_0$  et  $\rho'_0$  les demi-grands axes des orbites du Soleil et de la Lune. On aura alors

$$f M_1 = m^2 \rho_0^3,$$

et si l'on pose comme d'habitude

$$(37) \quad \begin{cases} \kappa = \frac{3 m^2}{4 n} \frac{C_0 - A_0 - B_0}{C_0}, \\ \kappa' = \frac{3 m^2}{4 n} \frac{B_0 - A_0}{C_0}, \\ \varepsilon = \frac{M_1'}{M_1} \frac{\rho_0^3}{\rho'^3}; \end{cases}$$

$$(38) \quad \begin{cases} U_0 = U_1 + U_2, \\ U_1 = -\kappa n C_0 \left( \frac{\rho_0^3}{\rho^3} \frac{\xi_1^2}{\rho^2} + \varepsilon \frac{\rho_0'^3}{\rho'^3} \frac{\xi_1'^2}{\rho'^2} \right), \\ U_2 = -\kappa' n C_0 \left( \frac{\rho_0^3}{\rho^3} \frac{\eta_1^2 - \xi_1^2}{\rho^2} + \varepsilon \frac{\rho_0'^3}{\rho'^3} \frac{\eta_1'^2 - \xi_1'^2}{\rho'^2} \right), \end{cases}$$

on est ramené à développer les expressions

$$\frac{\rho_0'^3}{\rho'^3} \frac{\xi_1'}{\rho'^2} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_0'^3}{\rho'^3} \frac{\eta_1'^2 - \xi_1'^2}{\rho'^2}$$

relatives à la Lune et les expressions analogues sans accents relatives au Soleil. Nous trouverons ainsi des séries de sinus et de cosinus d'arcs

de la forme  $\alpha t + \beta$ , en étendant naturellement le cas ordinaire au cas actuel.

Désignons par XY le plan fixe qui coïncide (*fig. 8*) avec le plan de l'écliptique à l'instant  $t = 0$ , et par Z son pôle boréal; soit AC le plan de l'écliptique à l'instant  $t$ , et Q son pôle boréal; mettons en évidence le plan BC de l'orbite de la Lune à l'instant  $t$ , et le point N' où le rayon joignant le centre de gravité de la Terre au centre de gravité de la Lune à l'époque  $t$  perce la sphère.

Nous poserons suivant l'usage

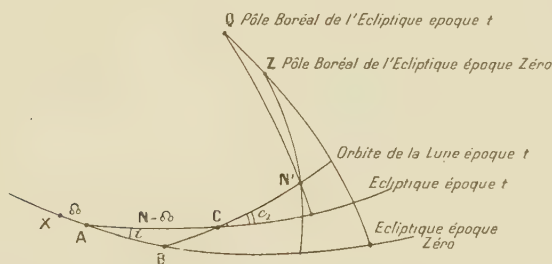
$$XA = \varnothing, \quad \widehat{BAC} = i,$$

$i$  étant une quantité très petite, et nous appellerons  $c$ , l'inclinaison, à l'époque  $t$ , de l'orbite de la Lune sur le plan de l'écliptique à la même époque. Soit

$$XA + AC = N,$$

et  $m't + \mu'$  la longitude moyenne de la Lune dans son orbite, comptée de X en A, puis de A en C, puis le long de CN'. Si  $\varpi'$  est la longitude

Fig. 8.



du périhélie lunaire comptée de la même façon, l'anomalie moyenne de la Lune à l'époque  $t$  sera

$$m't + \mu' - \varpi'.$$

Nous désignerons enfin par  $e'$  l'excentricité, faible d'ailleurs, de la Lune sur son orbite.

1° *Calcul de U<sub>1</sub>*. — On a ainsi

$$(39) \quad \frac{\rho_0'^3}{\rho'^3} \frac{\zeta_1'^2}{\rho'^2} = \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e'^2 - \frac{3}{4} c_1^2 \right) \sin^2 \theta \\ + c_1 \sin \theta \cos \theta \cos (N + \psi) + i \sin \theta \cos \theta \cos (\Omega + \psi) \\ - \frac{1}{4} c_1^2 \sin^2 \theta \cos (2N + 2\psi) - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos (2m't + 2\mu' + 2\psi) \\ + \frac{3}{2} e' \sin^2 \theta \cos (m't + \mu' - \varpi') + \dots$$

Pour avoir la quantité  $\frac{\rho_0'^3}{\rho'^3} \frac{\zeta_1'^2}{\rho'^2}$  relative au Soleil, il suffit de remplacer  $m', \mu', \varpi'$  et  $e'$  par les quantités analogues  $m, \mu, \varpi$  et  $e$  relatives au Soleil, et de faire  $c_1 = 0$ .

2° *Calcul de U<sub>2</sub>*. — On obtient de même

$$(40) \quad \frac{\rho_0'^3}{\rho'^3} \frac{\zeta_1'^2}{\rho'^2} = -\frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos 2\varphi - \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos (2m't + 2\mu' + 2\varphi + 2\psi) \\ - \cos^4 \frac{\theta}{2} \cos (2m't + 2\mu' - 2\varphi + 2\psi) \\ - \frac{3}{4} e' \sin^2 \theta [ \cos (m't + \mu' - \varpi' + 2\varphi) \\ + \cos (m't + \mu' - \varpi' - 2\varphi) ] \\ + \frac{1}{2} e' \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos (m't + \mu' - \varpi' + 2\varphi + 2\psi) \\ - \frac{7}{2} e' \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos (3m't + 3\mu' - \varpi' + 2\varphi + 2\psi) \\ + \frac{1}{2} e' \cos^4 \frac{\theta}{2} \cos (m't + \mu' + \varpi' - 2\varphi + 2\psi) \\ - \frac{7}{2} e' \cos^4 \frac{\theta}{2} \cos (3m't + 3\mu' - \varpi' - 2\varphi + 2\psi) \\ + \frac{1}{2} c_1 \sin \theta [ \cos (2m't + 2\mu' - 2\varphi - N + \psi) \\ - \cos (2m't + 2\mu' + 2\varphi - N + \psi) \\ - \cos (2\varphi - N - \psi) + \cos (2\varphi + N + \psi) ].$$

On obtient, comme plus haut, la quantité analogue relative au Soleil.

#### Fixité des pôles.

Si l'on forme

$$\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \sigma \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + \dots},$$

on a la tangente de l'angle que fait l'axe de rotation avec l'axe principal  $Oz_1$ , et si l'on démontre que la quantité  $\sigma = \sqrt{f_1^2 + f_1'^2}$ , supposée très petite à un moment donné, par exemple à l'instant  $t = 0$ , reste toujours très petite, on aura prouvé que les pôles seront toujours très voisins de l'axe  $Oz_1$  lié invariablement à la Terre. Pour cela, il suffit évidemment de prouver que  $f_1$  et  $f_1'$  restent toujours très petits.

En considérant  $U_0$  comme une fonction de  $\theta, \varphi, \psi$ , les formules (b) donnent

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial U_0}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_1}.$$

Or on a, d'après les formules (b),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_1} &= 1 + \frac{A_0 a \cos \theta'}{C_0 \sin \theta'} (f_1 \cos u_1 + f_1' \sin u_1) \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon_1} \\ &= 1 + \frac{A_0 a \cos \theta'}{C_0 \sin \theta'} (f_1 \cos u_1 + f_1' \sin u_1), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_1} &= \frac{A_0 a}{C_0} (f_1 \sin u_1 - f_1' \cos u_1) \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon_1} \\ &= \frac{A_0 a}{C_0} (f_1 \sin u_1 - f_1' \cos u_1), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_1} &= \frac{A_0 a}{C_0 \sin \theta'} (f_1 \cos u_1 + f_1' \sin u_1) \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon_1} \\ &= \frac{A_0 a}{C_0 \sin \theta'} (f_1 \cos u_1 + f_1' \sin u_1); \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} + \frac{A_0 a}{C_0} \left[ (f_1 \sin u_1 - f_1' \cos u_1) \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_1 \cos u_1 + f_1' \sin u_1}{\sin \theta'} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta' \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

On aurait de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial f_1} &= -\frac{A_0 a}{C_0} \left[ \cos u_1 \frac{\partial U_0}{\partial \theta} - \frac{\sin u_1}{\sin \theta'} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta' \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \frac{\partial U_0}{\partial f_1'} &= -\frac{A_0 a}{C_0} \left[ \sin u_1 \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \frac{\cos u_1}{\sin \theta'} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta' \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) \right], \end{aligned}$$

et l'on déduit des trois relations précédentes

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + f_1 \frac{\partial U_0}{\partial f_1'} - f_1' \frac{\partial U_0}{\partial f_1} = \frac{\partial U_0}{\partial \varphi}.$$

Toutes ces égalités reproduisent les égalités habituelles, mais il faut bien remarquer que  $u_1$  n'est plus le même que dans le cas classique.

Alors les formules (a) donneront, si l'on remplace  $\frac{\partial U_0}{\partial f_1}$  et  $\frac{\partial U_0}{\partial f'_1}$  par leurs valeurs,

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{df_1}{dt} = -\frac{k^2}{2C_0 n} f_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} + \frac{k^2}{B_0 b n} \left[ \sin u_1 \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \frac{\cos u_1}{\sin \theta'} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta' \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \frac{df'_1}{dt} = -\frac{k^2}{2C_0 n} f'_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} + \frac{k^2}{B_0 b n} \left[ -\cos u_1 \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \frac{\sin u_1}{\sin \theta'} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta' \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{cases}$$

Pour montrer que  $f_1$  et  $f'_1$  restent constamment très petits, nous allons chercher les parties principales de leurs variations (fournies par la première approximation) et montrer qu'elles sont négligeables. Remarquons d'abord que, comme on suppose  $f_1$  et  $f'_1$  d'abord très petits, on peut faire sensiblement, d'après les formules (b),

$$\theta = \theta', \quad \psi = \psi', \quad \varphi = \varepsilon_1 + \frac{nt}{k^2},$$

de sorte que les relations (41) se simplifient et deviennent

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{df_1}{dt} = \frac{k^2}{B_0 b n} \left[ \sin u_1 \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \frac{\cos u_1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \frac{df'_1}{dt} = \frac{k^2}{B_0 b n} \left[ -\cos u_1 \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \frac{\sin u_1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{cases}$$

Si nous ne conservons pas dans  $U_0$  les termes qui contiennent les petites quantités  $i$ ,  $c_1$ ,  $e$  et  $e'$ , nous aurons

$$(43) \quad U_0 = -\frac{1}{2} \kappa n C_0 (1 + \varepsilon) \sin^2 \theta \\ + \frac{1}{2} \kappa n C_0 \sin^2 \theta [\cos(2mt + 2\mu + 2\psi) + \varepsilon \cos(2m't + 2\mu' + 2\psi)] + U_2$$

si nous posons

$$(44) \quad U_2 = \frac{1}{2} \kappa' n C_0 (1 + \varepsilon) \sin^2 \theta \cos 2\varphi \\ + \kappa' n C_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} [\cos(2mt + 2\mu + 2\varphi + 2\psi) + \varepsilon \cos(2m't + 2\mu' + 2\varphi + 2\psi)] \\ + \kappa' n C_0 \cos^4 \frac{\theta}{2} [\cos(2mt + 2\mu - 2\varphi + 2\psi) + \varepsilon \cos(2m't + 2\mu' - 2\varphi + 2\psi)].$$

Nous en tirons aisément, en négligeant d'abord  $U_2$ , les dérivées  $\frac{\partial U_0}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial U_0}{\partial \psi}$ ,  $\frac{\partial U_0}{\partial \varphi}$  (cette dernière est égale à zéro). En utilisant la transformation élémentaire

$$\begin{aligned} \cos a \sin b \cos c - \cos b \sin c &= \cos^2 \frac{a}{2} [\sin(b - c) + \cos b \sin c] \\ &\quad - \sin^2 \frac{a}{2} [\sin(b + c) - \cos b \sin c] - \cos b \sin c \\ &= \cos^2 \frac{a}{2} \sin(b - c) - \sin^2 \frac{a}{2} \sin(b + c), \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} = \frac{-k^2 \times C_0 \sin \theta}{B_0 b} &\left[ (1 + \varepsilon) \cos \theta \sin u_1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin(u_1 + 2mt + 2\mu + 2\psi) \right. \\ &\quad - \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(u_1 - 2mt - 2\mu - 2\psi) \\ &\quad + \varepsilon \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin(u_1 + 2m't + 2\mu + 2\psi) \\ &\quad \left. - \varepsilon \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(u_1 - 2m't - 2\mu - 2\psi) \right]. \end{aligned}$$

Pour intégrer, nous regarderons, comme nous l'avons dit,  $\theta$  et  $\psi$  comme constants. De plus, vu l'hypothèse du refroidissement graduel, on peut écrire

$$k = e^{-\alpha t},$$

$\alpha$  étant un très petit coefficient positif que nous supposerons constant.

Enfin nous prendrons, d'après les formules (b),

$$u_1 = \varepsilon_1 + \frac{nt(1 + ab)}{k^2} = \varepsilon_1 + n't.$$

Substituons dans  $\frac{df_1}{dt}$ , et intégrons pour avoir la première partie  $\delta' f_1$  de la variation de  $f_1$ . Nous aurons trois sortes d'intégrales,

$$\int e^{-2\alpha t} \sin u_1 dt, \quad \int e^{-2\alpha t} \sin(u_1 \pm 2\odot) dt, \quad \int e^{-2\alpha t} \sin(u_1 \pm 2\mathbb{C}) dt,$$

que nous intégrerons par parties. On a, par exemple,

$$\int e^{-2\alpha t} \sin u_1 dt = -\frac{1}{2\alpha} \sin u_1 e^{-2\alpha t} - \frac{n'}{4\alpha^2} \int \cos u_1 d(e^{-2\alpha t}),$$

puis, de même,

$$\int \cos u_1 d(e^{-2\alpha t}) = \cos u_1 e^{-2\alpha t} + n' \int e^{-2\alpha t} \sin u_1 dt,$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\int e^{-2\alpha t} \sin u_1 dt = \frac{-e^{-2\alpha t}}{4\alpha^2 + n'^2} (2\alpha \sin u_1 + n' \cos u_1).$$

Les autres s'obtiennent de même, et l'on a ainsi

$$\begin{aligned} (45) \quad \delta' f_1 = & \frac{e^{-2\alpha t} x C_0 \sin \theta}{B_0 b} \\ & \times \left\{ \frac{(1 + \varepsilon) \cos \frac{\theta}{2}}{4\alpha^2 + n'^2} (2\alpha \sin u_1 + n' \cos u_1) \right. \\ & + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{4\alpha^2 + (n' + 2m)^2} [2\alpha \sin(u_1 + 2\odot) + (n' + 2m) \cos(u_1 + 2\odot)] \\ & - \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\alpha^2 + (n' - 2m)^2} [2\alpha \sin(u_1 - 2\odot) + (n' - 2m) \cos(u_1 - 2\odot)] \\ & + \frac{\varepsilon \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4\alpha^2 + (n' + 2m')^2} [2\alpha \sin(u_1 + 2\oslash) + (n' + 2m') \cos(u_1 + 2\oslash)] \\ & \left. - \frac{\varepsilon \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\alpha^2 + (n' - 2m')^2} [2\alpha \sin(u_1 - 2\oslash) + (n' - 2m') \cos(u_1 - 2\oslash)] \right\}. \end{aligned}$$

Quant à la partie  $\delta'' f_1$  qui provient de  $U_2$ , on l'obtiendra, comme le fait voir un calcul simple, en changeant dans  $\delta' f_1$ ,  $x$  en  $x'$ ,  $u_1$  en  $2\varphi - u_1$  et  $ab$  en  $-ab$ . Les parties  $\delta' f'_1$  et  $\delta'' f'_1$  de la variation de  $f'_1$  s'obtiennent en changeant  $u_1$  en  $u_1 - 90^\circ$  dans les formules correspondant à la variation de  $f_1$ .

Comme l'expérience montre que  $\frac{x'}{x}$  est petit, il suffit de montrer que  $\delta' f_1$  et  $\delta' f'_1$  sont petits : alors  $\delta'' f_1$  et  $\delta'' f'_1$  le seront forcément. Pour cela, considérons le point où le plan  $Z_1 = R_0$ , qui est fixe par rapport au trièdre d'inertie,  $R_0$  étant la valeur initiale du rayon terrestre, est rencontré par l'axe instantané de rotation. Comme, d'après les relations (c), on a sensiblement  $r = \frac{n}{k^2}$ , les équations de cet axe

seront

$$\frac{X_1}{R_0(3+q)} = \frac{Y_1}{R_0(3+q)} = \frac{k^2 Z_1}{n},$$

et, par rapport au point où l'axe  $OZ_1$  perce le plan fixe, les coordonnées du pôle seront

$$X_1 = k^2 \frac{p}{n} R_0, \quad Y_1 = k^2 \frac{q}{n} R_0,$$

ou bien, d'après les formules (c),

$$X_1 = R_0 a \sigma \cos u, \quad Y_1 = R_0 b \sigma \sin u, \quad \left[ u = ab \left( \frac{nt}{k^2} + \varepsilon'_1 \right) \right].$$

On sait que l'on démontre que  $\delta' f_i$  et  $\delta' f'_i$  sont petits en s'occupant du lieu du pôle et montrant qu'il reste certainement à l'intérieur d'une circonférence de petit rayon : cette circonstance se trouvera vérifiée dans le cas actuel, parce que  $\delta' f_i$  et  $\delta' f'_i$  sont plus petits à cause du facteur  $k^2$  qui figure dans  $\frac{df_1}{dt}$  et  $\frac{df'_1}{dt}$ .

En somme, on doit considérer que dans l'hypothèse actuelle l'axe de rotation tend à se rapprocher de plus en plus de l'axe principal  $OZ_1$ .

Ce qui précède constitue une première approximation, mais on ne se convainc que  $f_i$  et  $f'_i$  ne possèdent pas d'inégalités séculaires en revenant aux équations (a)

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= -\frac{k^2}{2C_0 n} f_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} - \frac{k^2 C_0}{A_0 B_0 a b n} \frac{\partial U_0}{\partial f'_1}, \\ \frac{df'_1}{dt} &= -\frac{k^2}{2C_0 n} f'_1 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + \frac{k^2 C_0}{A_0 B_0 a b n} \frac{\partial U_0}{\partial f_1}, \end{aligned}$$

et conservant aux seconds membres les termes du premier degré en  $f_i$  et  $f'_i$ , et dont les coefficients sont indépendants de  $u$ , de  $\varphi$  et des moyens mouvements.

On a alors  $\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} = 0$ , et par suite

$$\frac{df_1}{dt} = -\frac{k^2 C_0}{A_0 B_0 a b n} \frac{\partial U_0}{\partial f'_1}, \quad \frac{df'_1}{dt} = +\frac{k^2 C_0}{A_0 B_0 a b n} \frac{\partial U_0}{\partial f_1},$$

et l'on peut réduire  $U_0$  à l'expression

$$-\frac{1}{2} \kappa n C_0 (1 + \varepsilon) \sin^2 \theta$$

en négligeant  $e'^2$  et  $c_1^2$ . On est alors conduit à écrire

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= + \frac{k^2 \kappa}{2} (1 + \varepsilon) (3 \cos^2 \theta' - 1) f_1' \\ \frac{df_1'}{dt} &= - \frac{k^2 \kappa}{2} (1 + \varepsilon) (3 \cos^2 \theta' - 1) f_1, \end{aligned}$$

d'où

$$f_1 \frac{df_1}{dt} + f_1' \frac{df_1'}{dt} = \sigma \frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

L'élément  $\sigma$  n'a donc pas d'inégalité séculaire.

#### Vitesse de rotation. Jour sidéral.

Partons de la formule (c)

$$\omega = \frac{n}{k^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{A_0 + B_0}{C_0} \alpha^2 b^2 c^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 b^2 c^2 \sigma^2 \cos 2u \right)$$

qui montre que,  $\sigma^2$  étant petit, la variation de la vitesse de rotation  $\omega$  ne peut provenir que de celle de  $\frac{n}{k^2}$ . Or, d'après les formules (a), on a, puisque  $f_1$  et  $f_1'$  sont négligeables,

$$C_0 \frac{dn}{dt} = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} = k^2 \frac{\partial U_0}{\partial \varphi}.$$

D'après les formules (43) et (44), on peut réduire  $U_0$  à  $U_2$ , en négligeant tous les termes qui ne contiennent pas  $\varphi$ , et l'on aura

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= - k^2 \kappa' n (1 + \varepsilon) \sin^2 \theta \sin 2\varphi \\ &\quad - 2 k^2 \kappa' x \sin^4 \frac{\theta}{2} [\sin(2\varphi + 2\odot) + \varepsilon \sin(2\varphi + 2\mathbb{C})] \\ &\quad + 2 k^2 \kappa' n \cos^4 \frac{\theta}{2} [\sin(2\odot - 2\varphi) + \varepsilon \sin(2\mathbb{C} - 2\varphi)]. \end{aligned}$$

Intégrons en remarquant que  $k = e^{-\alpha t}$  donne sensiblement  $k^2 = 1 - 2\alpha t$ , et que les formules (b) donnent à très peu près

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{n}{k^2}.$$

Nous aurons trois sortes d'intégrales qu'on traite comme celles qu'on a rencontrées dans l'étude de la fixité des pôles, savoir

$$\begin{aligned} \int t d \cos 2\varphi &= t \cos 2\varphi - \frac{k^2}{2n} \sin 2\varphi, \\ \int t d \cos(2\varphi \pm 2\odot) &= t \cos(2\varphi \pm 2\odot) - \frac{k^2}{2n \left(1 \pm m \frac{k^2}{n}\right)} \sin(2\varphi \pm 2\odot), \end{aligned}$$

et une troisième intégrale analogue à la seconde. D'où,  $n'$  étant arbitraire,

$$\begin{aligned} (46) \quad \frac{n}{k^2} &= \frac{n'}{k^2} + \frac{1}{2} \alpha' (1 + \varepsilon) \sin^2 \theta \cos 2\varphi + \alpha' \sin^4 \frac{\theta}{2} \left[ \frac{\cos(2\varphi + 2\odot)}{1 + \frac{m k^2}{n}} + \varepsilon \frac{\cos(2\varphi + 2\mathbb{C})}{1 + \frac{m' k^2}{n}} \right] \\ &\quad + \alpha' \cos^4 \frac{\theta}{2} \left[ \frac{\cos(2\varphi - 2\odot)}{1 - \frac{m k^2}{n}} + \varepsilon \frac{\cos(2\varphi - 2\mathbb{C})}{1 - \frac{m' k^2}{n}} \right] \\ &\quad - 2\alpha\alpha' \left\{ \frac{1}{2} (1 + \varepsilon) \sin^2 \theta \left( t \cos 2\varphi - \frac{k^2}{2n} \sin 2\varphi \right) \right. \\ &\quad + \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{m k^2}{n}} \left[ t \cos(2\varphi + 2\odot) - \frac{k^2}{2n \left(1 + \frac{m k^2}{n}\right)} \sin(2\varphi + 2\odot) \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon \sin^4 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{m' k^2}{n}} \left[ t \cos(2\varphi + 2\mathbb{C}) - \frac{k^2}{2n \left(1 + \frac{m' k^2}{n}\right)} \sin(2\varphi + 2\mathbb{C}) \right] \\ &\quad + \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{m k^2}{n}} \left[ t \cos(2\varphi - 2\odot) - \frac{k^2}{2n \left(1 - \frac{m k^2}{n}\right)} \sin(2\varphi - 2\odot) \right] \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon \cos^4 \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{m' k^2}{n}} \left[ t \cos(2\varphi - 2\mathbb{C}) - \frac{k^2}{2n \left(1 - \frac{m' k^2}{n}\right)} \sin(2\varphi - 2\mathbb{C}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Pendant le temps  $dt$ , le corps tourne de l'angle  $\omega dt$ , et pendant le temps  $t$  de  $\int \omega dt$ . Comme  $\sigma^2$  est très petit, on peut le négliger dans  $\omega$ , et prendre approximativement

$$\int \omega dt = \int \frac{n}{k^2} dt.$$

On a donc sensiblement

$$(47) \quad \int \omega dt = \text{const.} + \frac{n' t}{k^2} + \frac{1}{4} \frac{k^2 x'}{n} (1 + \varepsilon) \sin^2 \theta \sin 2\varphi \\ + \frac{1}{2} \frac{k^2 x'}{n} \sin^4 \frac{\theta}{2} \left[ \frac{\sin(2\varphi + 2\odot)}{\left(1 + \frac{m k^2}{n}\right)^2} + \varepsilon \frac{\sin(2\varphi + 2\mathbb{C})}{\left(1 + \frac{m' k^2}{n}\right)^2} \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{k^2 x'}{n} \cos^4 \frac{\theta}{2} \left[ \frac{\sin(2\varphi - 2\odot)}{\left(1 - \frac{m k^2}{n}\right)^2} + \varepsilon \frac{\sin(2\varphi - 2\mathbb{C})}{\left(1 - \frac{m' k^2}{n}\right)^2} \right] \\ + \frac{\alpha}{2} \frac{k^2 x'}{n} [\dots].$$

Or on déduit des observations du pendule que

$$\frac{1}{2} \frac{x'}{n} = 0'',58 \frac{B_0 - A_0}{C_0} < 0'',0001;$$

*a fortiori*  $\frac{k^2 x'}{n}$  et  $\frac{\alpha k^2 x'}{n}$  peuvent être négligés, et l'on peut prendre

$$(48) \quad \int \omega dt = \text{const.} + \frac{n' t}{k^2}.$$

On voit que, dans la première approximation, la vitesse de rotation peut être prise égale à  $\frac{n'}{k^2} = n'(1 + 2\alpha t)$  et qu'elle augmente quand le temps  $t$  augmente, ainsi que nous l'avions prévu plus haut. Au contraire, le jour sidéral, c'est-à-dire le temps au bout duquel  $\int \omega dt$  augmente de  $2n$ , diminue avec le temps, comme étant égal à

$$\frac{2n k^2}{n'} = \frac{2n(1 - 2\alpha t)}{n'}.$$

Dans la seconde approximation, les conclusions restent les mêmes, eu égard à l'extrême petitesse des inégalités du premier ordre.

### Précession et nutation.

On a trouvé antérieurement la relation

$$\sin \theta_0 = \frac{\Lambda_0}{C_0} a \sigma$$

qui montre que l'angle  $\theta_0$  est très petit et même que  $\theta_0$  est complètement négligeable, eu égard à la petitesse de  $\sigma$ . Il en est de même de  $f_1$  et  $f'_1$ , d'après ce qu'on a vu plus haut. On aura donc d'après ce qui précède

$$\psi = \psi', \quad \theta = \theta', \quad \varphi = \varphi'.$$

Donc le plan du couple résultant, le plan  $x, Oy$ , et le plan perpendiculaire à l'axe de rotation sont confondus, et les variables  $\psi$  et  $\theta$  fixent à l'époque  $t$  la position de l'équateur par rapport au plan fixe XOY.

On peut d'après ce qui précède faire  $\frac{\partial U_0}{\partial \varphi} = 0$ , donc aussi

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varphi'} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} = 0,$$

et les formules (a) donnent

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{1}{k^2} \frac{d\psi}{dt} = - \frac{1}{C_0 n \sin \theta} \frac{\partial U_0}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{k^2} \frac{d\theta}{dt} = + \frac{1}{C_0 n \sin \theta} \frac{\partial U_0}{\partial \psi}, \end{cases}$$

de sorte que, pour étudier les variations de  $\psi$  et  $\theta$  avec le temps  $t$ , il faut former  $\frac{\partial U_0}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial U_0}{\partial \psi}$ . Comme  $U_0 = U_1 + U_2$ , et qu'il résulte de l'étude de la fixité des pôles à la surface de la Terre que les intégrales  $\int \frac{\partial U_2}{\partial \theta} dt$  et  $\int \frac{\partial U_2}{\partial \psi} dt$  sont insensibles, reportons-nous à la formule (39) et introduisons les inégalités séculaires relatives à la théorie du Soleil.

Nous pouvons prendre avec M. Tisserand

$$e = e_0 + e_1 t, \quad i \sin \varpi = g t + r t^2, \quad i \cos \varpi = g' t + r' t^2,$$

F.

les coefficients  $e, g, r, g', r'$  étant très petits, et nous aurons, après un calcul sans difficulté :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{C_0 n x} U_0 = & \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_0^2 + \varepsilon \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e'^2 - \frac{3}{4} c_1^2 \right) \right] \sin^2 \theta \\
 & + \left[ (1 + \varepsilon) (g' \cos \psi - g \sin \psi) \sin \theta \cos \theta \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3}{2} e_0 e_1 \sin^2 \theta + \frac{3}{2} e_1 \sin^2 \theta \cos (mt + \mu - \varpi) \right] t \\
 & + \left[ \frac{3}{4} e_1^2 \sin^2 \theta + (1 + \varepsilon) (r' \cos \psi - r \sin \psi) \sin \theta \cos \theta \right] t^2 \\
 & + \varepsilon c_1 \sin \theta \cos \theta \cos (N + \psi) - \frac{1}{4} \varepsilon c_1^2 \sin^2 \theta \cos (2N + 2\psi) \\
 & - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos (2mt + 2\mu + 2\psi) - \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \theta \cos (2m't + 2\mu' + 2\psi) \\
 & + \frac{3}{2} e_0 \sin^2 \theta \cos (mt + \mu - \varpi) + \frac{3}{2} \varepsilon e' \sin^2 \theta \cos (m't + \mu' - \varpi').
 \end{aligned}$$

Les inégalités périodiques et séculaires des éléments  $e', m', \mu', \varpi', c_1$  et  $N$  n'ont aucun effet appréciable, sauf peut-être en ce qui concerne  $N$ , comme on le verra plus loin.

Appelons  $-\frac{Z}{x}$  l'ensemble des trois dernières lignes,  $\frac{\mathcal{F}}{x}$  le coefficient de  $\sin^2 \theta$  dans la première, et posons

$$\frac{G}{x} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{J}{x} = \frac{3}{2} e_0 e_1, \quad \frac{\mathcal{K}}{x} = \frac{3}{4} e_1^2;$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
 (50) \quad \frac{1}{C_0 n} U_0 = & -\frac{\mathcal{F}}{x} \sin^2 \theta - [G(g' \cos \psi - g \sin \psi) \sin \theta \cos \theta + J \sin^2 \theta] t \\
 & - [G(r' \cos \psi - r \sin \psi) \sin \theta \cos \theta + \mathcal{K} \sin^2 \theta] t^2 + Z.
 \end{aligned}$$

Alors les équations (49) donnent

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{k^2} \frac{d\psi}{dt} = & 2\frac{\mathcal{F}}{x} \cos \theta + \left[ G(g' \cos \psi - g \sin \psi) \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} + 2J \cos \theta \right] t \\
 & + \left[ G(r' \cos \psi - r \sin \psi) \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} + 2\mathcal{K} \cos \theta \right] t^2 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Z}{\partial \psi}, \\ \frac{1}{k^2} \frac{d\theta}{dt} = & G \cos \theta (g' \sin \psi + g \cos \psi) t + G \cos \theta (r' \sin \psi + r \cos \psi) t^2 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Z}{\partial \psi}. \end{aligned} \right.$$

Nous intégrerons ces équations en tenant compte de ce que  $\mathcal{F}, J, \mathcal{K}$ ,

$\mathfrak{A}$ ,  $g$ ,  $g'$ ,  $r$ ,  $r'$  ont des valeurs très petites, et faisant encore  $k = e^{-\alpha t}$ , d'où sensiblement  $k^2 = 1 - 2\alpha t$ .

Commençons par négliger les dérivées partielles de  $Z$ . Nous représenterons par  $\theta_1$  la valeur initiale de  $\theta$ , et par  $\psi_1$  la valeur initiale de  $\psi$ . Nous conviendrons d'écrire des formules suffisant aux besoins *pendant deux siècles* à partir de l'instant  $t = 0$  : pendant cet intervalle,  $\psi$  qui d'après l'expérience varie environ de  $50''$  par an variera de moins de  $3^\circ$  et nous pourrons faire, au second membre,  $\psi = \psi_1$  et  $\theta = \theta_1$ . Nous aurons donc les équations

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= 2\mathfrak{F} \cos \theta_1 + \left[ G(g' \cos \psi_1 - g \sin \psi_1) \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} + 2\mathfrak{J} \cos \theta_1 \right] t \\ &\quad + \left[ G(r' \cos \psi_1 - r \sin \psi_1) \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} + 2\mathfrak{K} \cos \theta_1 \right] t^2 \\ &\quad - 4\alpha \mathfrak{F} \cos \theta_1 t - 2\alpha \left[ G(g' \cos \psi_1 - g \sin \psi_1) \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} + 2\mathfrak{J} \cos \theta_1 \right] t^2 \\ &\quad - 2\alpha \left[ G(r' \cos \psi_1 - r \sin \psi_1) \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} + 2\mathfrak{K} \cos \theta_1 \right] t^3, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \cos \theta_1 (g' \sin \psi_1 + g \cos \psi_1) t \\ &\quad + G \cos \theta_1 (r' \sin \psi_1 + r \cos \psi_1) t^2 \\ &\quad - 2\alpha G \cos \theta_1 (g' \sin \psi_1 + g \cos \psi_1) t^2 \\ &\quad - 2\alpha G \cos \theta_1 (r' \sin \psi_1 + r \cos \psi_1) t^3, \end{aligned} \right.$$

qui donnent par intégration

$$\psi = \text{const.} + ka t + k' b t^2 + k'' c t^3, \quad \theta = \text{const.} + k' \nu t^2 + k'' \nu' t^3,$$

si l'on pose

$$\begin{aligned} a &= 2\mathfrak{F} \cos \theta_1, \\ b &= \frac{1}{2} G(g' \cos \psi_1 - g \sin \psi_1) \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} + \mathfrak{J} \cos \theta_1, \\ c &= G(r' \cos \psi_1 - r \sin \psi_1) \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} + 2\mathfrak{K} \cos \theta_1, \\ \nu &= \frac{1}{2} G \cos \theta_1 (g' \sin \psi_1 + g \cos \psi_1), \\ \nu' &= G \cos \theta_1 (r' \sin \psi_1 + r \cos \psi_1), \\ k &= 1 - \alpha t, \\ k' &= 1 - \frac{2}{3} \alpha t, \\ k'' &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \alpha t. \end{aligned}$$

Il faut rétablir maintenant les dérivées  $\frac{\partial Z}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial Z}{\partial \psi}$  dans les équations (51). Pour intégrer ces équations, posons

$$(53) \quad \psi = \text{const.} + kat + k'bt^2 + k''ct^3 + \Psi, \quad \theta = \text{const.} + k'\nu t^2 + k''\nu' t^3 + \Theta.$$

Une fois effectuées les différentiations, remplaçons  $\theta$  par  $\theta_1$  et  $\psi$  par  $\psi_1 + kat$ , en négligeant les petits coefficients  $b$ ,  $c$ ,  $\nu$  et  $\nu'$ , enfin posons

$$N_1 + \psi = \alpha_2 - \alpha_1 t,$$

en supposant que le nœud de la Lune rétrograde uniformément sur l'écliptique de façon à parcourir  $360^\circ$  en 18 ans  $\frac{2}{3}$ , et nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \frac{d\Psi}{dt} &= x\varepsilon c_1 \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} \cos(N + \psi) \\ &\quad - x \cos \theta_1 \left[ \frac{1}{2} \varepsilon c_1^2 \cos(2N + 2\psi) + \cos(2mt + 2\mu + 2\psi) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \cos(m't + 2\mu' + 2\psi) - 3e_0 \cos(mt + \mu - \varpi) \right. \\ &\quad \left. - 3\varepsilon e' \cos(m't + \mu' - \varpi') \right], \\ \frac{1}{k^2} \frac{d\Theta}{dt} &= x\varepsilon c_1 \cos \theta_1 \sin(N + \psi) \\ &\quad - x \sin \theta_1 \left[ \frac{1}{2} \varepsilon c_1^2 \sin(2N + 2\psi) + \sin(2mt + 2\mu + 2\psi) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sin(2m't + 2\mu' + 2\psi) \right]. \end{aligned}$$

En se bornant aux deux premiers termes qui sont de beaucoup les plus importants, on a

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = e^{-2\alpha t} x \varepsilon c_1 \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} \cos(N + \psi), \\ \frac{d\Theta}{dt} = e^{-2\alpha t} x \varepsilon c_1 \cos \theta_1 \sin(N + \psi). \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'intégrer facilement. Comme  $k^2$  est  $< 1$ , nous prendrons pour  $k^2 x$  une valeur moyenne  $x_1 < x$ , ce qui donnera

$$(55) \quad \begin{cases} \Psi = -x_1 \varepsilon \frac{c_1}{\alpha_1} \frac{\cos 2\theta_1}{\sin \theta_1} \sin(N + \psi), \\ \Theta = -x_1 \varepsilon \frac{c_1}{\alpha_1} \cos \theta_1 \cos(N + \psi). \end{cases}$$

On peut, dans les équations (53), supposer égale à  $\psi_1$  la constante de  $\psi$ , et égale à  $\theta_1$  la constante de  $\theta$ , et écrire

$$(56) \quad \begin{cases} \psi = \psi_1 + kat + k'bt^2 + k''ct^3 + \Psi, \\ \theta = \theta_1 + k'\nu t^2 + k''\nu' t^3 + \Theta. \end{cases}$$

Posons, suivant l'usage,

$$(57) \quad \begin{cases} \psi_m = \psi_1 + kat + k'bt^2 + k''ct^3, \\ \theta_m = \theta_1 + k'\nu t^2 + k''\nu' t^3, \end{cases}$$

les valeurs de  $\psi_m$  et de  $\theta_m$  déterminant la position de l'équateur moyen, et l'on aura

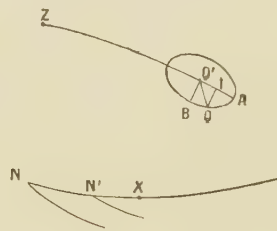
$$(58) \quad \begin{cases} \psi = \psi_m + \Psi, \\ \theta = \theta_m + \Theta. \end{cases}$$

C'est le mouvement de l'équateur moyen par rapport au plan fixe qui produit la *précession des équinoxes*;  $\psi_m$  est la *précession luni-solaire*. Le mouvement de l'équateur vrai par rapport à l'équateur moyen constitue le phénomène de la *nutation*.

### Ellipse de nutation.

Si l'on se borne, comme d'habitude, aux expressions précédentes de  $\Psi$  et de  $\Theta$ , qui se déduisent des valeurs ordinaires en remplaçant  $x$

Fig. 9.



par une constante plus petite  $x_1$ , on a une représentation géométrique intéressante.

Soit N (*fig. 9*) le nœud descendant de l'équateur vrai relativement

au plan fixe, et Q le pôle boréal de l'équateur vrai, N' et Q' ceux de l'équateur moyen. On aura alors

$$\begin{aligned} \text{XN}' &= \psi_m, & \text{XN} &= \psi_m + \Psi, & \text{NN}' &= \Psi = \widehat{\text{QZQ}'}, \\ \text{ZQ}' &= \theta_m, & \text{ZQ} &= \theta_m + \Theta, & \text{ZQ} - \text{ZQ}' &= \Theta. \end{aligned}$$

L'angle  $\widehat{\text{QZQ}'}$  étant très petit, prenons dans le plan tangent en Q' à la sphère céleste pour axe des  $x$  la tangente au prolongement Q'A de ZQ' et pour axe des  $y$  la perpendiculaire Q'B dirigée du côté de Q, on aura sensiblement

$$\begin{aligned} x = \overline{\text{Q'I}} &= \Theta = x_1 \varepsilon \frac{c_1}{\alpha_1} \cos \theta_1 \cos (N + \psi), \\ y = \overline{\text{IQ}} &= \Psi \sin \theta_1 = -x_1 \varepsilon \frac{c_1}{\alpha_1} \cos 2 \theta_1 \sin (N + \psi), \end{aligned}$$

de sorte que le pôle vrai décrit autour du pôle moyen une petite ellipse dont les demi-axes

$$a' = x_1 \varepsilon \frac{c_1}{\alpha_1} \cos \theta_1, \quad b' = x_1 \varepsilon \frac{c_1}{\alpha_1} \cos 2 \theta_1$$

sont dirigés le premier (qui est le plus grand) suivant Q'A et le second suivant Q'B. Comme  $x_1$  va en diminuant, les axes de cette ellipse doivent être considérés comme allant en diminuant au cours des siècles. Quant au pôle moyen Q', les relations

$$\psi_m = \psi_1 + kat, \quad \theta_m = \theta_1$$

obtenues en négligeant dans les relations (57) les termes en  $t^2$  montrent qu'il décrit autour du pôle de l'écliptique, d'un mouvement uniforme, un petit cercle correspondant à l'intervalle polaire  $\theta_1$ . Pendant ce temps, le pôle vrai, entraîné par le pôle moyen, décrit autour de celui-ci la petite ellipse obtenue plus haut : son mouvement tend à s'éteindre avec les siècles.

#### Mouvement de l'équateur par rapport à l'écliptique mobile.

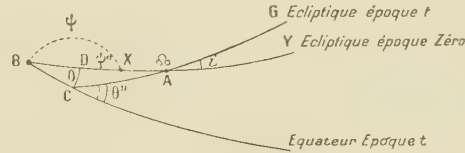
Pour connaître cet important mouvement, nous suivrons la méthode ordinaire. Nous conviendrons d'abord, selon l'usage, de faire  $\psi_1 = 0$ ,

et nous poserons, en prenant pour plan XOY l'écliptique de l'époque zéro (*fig. 10*),

$$\begin{aligned} \text{XA} &= \varnothing, & \widehat{\text{GAY}} &= i, \\ \text{XB} &= \psi, & \widehat{\text{B}} &= \theta, \\ \text{XD} &= \psi'', & \widehat{\text{C}} &= \theta'', \end{aligned}$$

CD étant un arc de grand cercle perpendiculaire sur AB, de sorte que

Fig. 10.



les angles  $\psi''$  et  $\theta''$  fixeront complètement la position de l'équateur de l'époque  $t$  par rapport à l'écliptique de la même époque.

Un calcul connu donne

$$(59) \quad \begin{cases} \psi'' = \psi - i \cot \theta \sin(\psi + \varnothing) + i^2 \cot^2 \theta \sin(\psi + \varnothing) \cos(\psi + \varnothing), \\ \theta'' = \theta - i \cos(\psi + \varnothing) + \frac{1}{2} i^2 \cot \theta \sin^2(\psi + \varnothing). \end{cases}$$

Actuellement,  $\psi_1$  est nul, et l'on peut se borner à

$$\psi = kat + k' bt^2, \quad \theta = \theta_1 + k' \nu t^2,$$

Dans les termes en  $i$  des équations précédentes, remplaçons  $\psi$  par  $kat$ ,  $\sin(\varnothing + \psi)$  par  $\sin \varnothing + kat \cos \varnothing$ ,  $\cos(\varnothing + \psi)$  par  $\cos \varnothing - kat \sin \varnothing$ , et  $\theta$  par  $\theta_1$ ; dans les termes en  $i^2$ , remplaçons  $\psi$  par 0 et  $\theta$  par  $\theta_1$ . Alors les équations (59) deviennent

$$\begin{aligned} \psi'' &= kat + k' bt^2 - i \sin \varnothing \cot \theta_1 - i \cos \varnothing kat \cot \theta_1 + i \sin \varnothing i \cos \varnothing \cot^2 \theta_1, \\ \theta'' &= \theta_1 + k' \nu t^2 + i \cos \varnothing - i \cos \varnothing kat + \frac{1}{2} (i \sin \varnothing)^2 \cot \theta_1, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant  $i \sin \varnothing$  et  $i \cos \varnothing$  par leurs valeurs vues plus haut,

$$\begin{aligned} \psi'' &= P t + P' t^2 + P'' t^3 + \Psi, \\ \theta'' &= \theta_1 + Q t + Q' t^2 + Q'' t^3 + \Theta. \end{aligned}$$

Dans ces formules nous avons posé

$$(60) \quad \begin{cases} P = a - g \cot \theta_1, \\ P' = -\alpha a + b - (r + ag') \cot \theta_1 + gg' \cot^2 \theta_1, \\ P'' = \alpha ag' \cot \theta_1 - \frac{2}{3} ab, \\ Q = g', \\ Q' = v + r' - ag + \frac{1}{2} g^2 \cot \theta_1, \\ Q'' = ag - \frac{2}{3} \alpha v. \end{cases}$$

Cherchons enfin ce que deviennent dans le cas actuel les constantes habituelles de la précession et de la nutation. Continuons à appeler *constante de la précession* le coefficient de  $t$  dans  $\psi''$ ; on voit que ce coefficient est demeuré le même. Mais  $P'$ , et par conséquent  $\psi''$ , diminue quand le temps augmente. Quant à la constante de la nutation, c'est le coefficient de  $\cos(N + \psi)$  dans l'expression (55), autrement dit c'est le demi-grand axe  $a'$  de l'ellipse de mutation : sa valeur, désignée habituellement par  $N$ , diminue donc aussi au cours des siècles.

#### RÉSUMÉ DES PRINCIPAUX RÉSULTATS.

Axes permanents et spontanés de rotation; extension des définitions ordinaires (p. 9 et 10).

Ellipsoïde de Poinsot : roulement sur un plan qui se déplace parallèlement à lui-même (p. 16 à 18).

Mouvement de la Terre en supposant qu'il n'y ait pas de forces extérieures : extension de l'équation de Jacobi (p. 22 à 31).

Mouvement troublé : généralisation des formules ordinaires (p. 31 à 40).

Accroissement de la vitesse de rotation, diminution du jour sidéral (p. 46 à 48).

Diminution de la précession et de la nutation au cours des siècles (p. 49 à 56).

*Vu et approuvé :*

Paris, le 6 mai 1913.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 6 mai 1913.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
L. LIARD.



---

## SECONDE THÈSE.

---

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Équations aux dérivées partielles du premier ordre.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 6 mai 1913.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 6 mai 1913.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.









---

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

52252 Quai des Grands-Augustins, 55

---